Zestaw zadań z Geometrii z algebrą liniową
dla kierunku Informatyka, rok akadem. 2015/2016

---

1. Grupy i ciała

Zad. 1. Wyjaśnić pojęcia: działanie dwuargumentowe, działanie łączne, działanie przemienne, element neutralny (jedynka), półgrupa, monoid.

Zad. 2. Który z poniższych zbiorów wraz ze wskazanym działaniem jest grupa? Wskazać element neutralny.

(a) zbiór wszystkich całkowitych wielokrotności danej liczby rzeczywistej a z działaniem dodawania;
(b) zbiór dodatnich liczb wymiernych z działaniem mnozenia;
(c) zbiór liczb wymiernych z działaniem dodawania;
(d) zbiór liczb wymiernych z działaniem odejmowania.

Zad. 3. Ile różnych działań można określić w dowolnym zbiorze zawierającym tylko jeden element?

Zad. 4. Niech $n\mathbb{Z} = \{nm : \ m \in \mathbb{Z}\}$ będzie zbiorem liczb całkowitych podzielnych przez n. Pokazać, że $(n\mathbb{Z}, +, 0)$ jest monoidem przemienym, a $(n\mathbb{Z}, \cdot)$ jest półgrupą bez jedynki (dla $n > 1$).

Zad. 5. W dowolnym niepustym zbiorze rozpatrujemy działanie $\circ$ zdefiniowane następująco: $x \circ y = x$. Sprawdzić, czy działanie jest łączne i przemienne. Określić, kiedy to działanie ma element neutralny, a kiedy go nie ma.

Zad. 6. W zbiorze liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ wprowadzamy dwa działania $\oplus$ oraz $\odot$ określone w nastęujący sposób:

$$a \oplus b = a + b + 1, \qquad a \odot b = ab + a + b,$$

dla dowolnych licz $a, b \in \mathbb{Q}$, gdzie $+$ oraz $\cdot$ oznaczają zwykłe działania dodawania oraz mnożenia w zbiorze $\mathbb{Q}$. Udowodnić, że działania $\oplus$ i $\odot$ są łączne, przemienne oraz mają elementy neutralne. Wykazać, że działanie $\odot$ jest rozdzielne względem $\oplus$, ale działanie $\oplus$ nie jest rozdzielne względem działania $\odot$.

Zad. 7. Wyjaśnić pojęcia: element odwrotny, grupa, grupa abelowa.

Zad. 8. Zbadać, czy zbiór liczb całkowitych $\mathbb{Z}$ z działaniem $\diamond$ zdefiniowanym:

$$a \diamond b = a + ab + b$$

jest grupą.

Zad. 9. Niech $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, ..., n-1\}$. Na zbiorze $\mathbb{Z}_n$ rozważamy działanie $+$ jako dodawanie modulo n. Pokazać, że $(\mathbb{Z}_n, +, 0)$ jest n-elementową grupą abelową.

Zad. 10. Niech $\mathbb{Z}_n^* = \mathbb{Z}_n \backslash \{0\}$. Na zbiorze $\mathbb{Z}_n^*$ rozważamy działanie $\cdot$ jako mnożenie modulo n. Pokazać, że jeśli n jest liczbą pierwszą, to $(\mathbb{Z}_n^*, \cdot, 1)$ jest grupą abelową.

Zad. 11. Ile różnych działań "$\diamond$" można określić na zbiorze

(a) 2-elementowym $X = \{a, e\}$,

(b) 3-elementowym $X = \{a, b, e\}$,

tak, aby $(X, \diamond, e)$ było grupą?

Zad. 12. Czy działanie w grupie permutacji $(S_n, \circ, \mathrm{id})$ jest przemienne?

Zad. 13. Czy istnieje grupa nieabelowa mająca 2 lub 3 elementy?

Zad. 14. Niech $(G, \diamond, e)$ będzie grupą i $a, b \in G$. Pokazać, że

$$(a \diamond b)^{-1} = b^{-1} \diamond a^{-1}.$$

Zad. 15. Wyjaśnić pojęcie: ciało.

Zad. 16. Pokazać, że zbiór $\{0, 1, a, b\}$ z wyróżnionymi elementami 0 i 1 oraz z działaniemi określonymi następująco:

$+$	0	1	a	b
0	0	1	a	b
1	1	0	b	a
a	a	b	0	1
b	b	a	1	0

$\cdot$	0	1	a	b
0	0	0	0	0
1	0	1	a	b
a	0	a	b	1
b	0	b	1	a

tworzy ciało.

Zad. 17. Pokazać, że zbiór $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ złożony ze wszystkich liczb rzeczywistych postaci $a + b\sqrt{2}$, gdzie $a, b \in \mathbb{Q}$, ze zwykłymi działaniami dodawania i mnożenia oraz z wyróżnionymi liczbami 0 i 1 jest ciałem.

Zad. 18. Niech $(K, +, \cdot, 0, 1)$ będzie ciałem, a x, y, z będą jego dowolnymi elementami. Pokazać:

(a) (tzw. prawo skracania)

- jeśli $x + z = y + z$, to $x = y$,
- jeśli $x \cdot z = y \cdot z$ i $z \neq 0$, to $x = y$;

(b) $x \cdot 0 = 0$;

(c) $0 \neq 1$;

(d) $-(-x) = x$.