

Praca domowa nr 1 - na 21.10.2015r.

Zad. 1. Pokazać, że zbiór $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ złożony ze wszystkich liczb rzeczywistych postaci $a + b\sqrt{2}$, gdzie $a, b \in \mathbb{Q}$, ze zwykłymi działaniami dodawania i mnożenia oraz z wyróżnionymi liczbami 0 i 1 jest ciałem.

Zad. 2. Rozstrzygnąć, dla jakich liczb całkowitych n równanie

$$|z - (1 + i)^n| = z$$

ma rozwiązanie w dziedzinie zespolonej.

Zad. 3. Niech $n \in \mathbb{N}$. Znaleźć wszystkie liczby zespolone z , dla których

$$\sum_{k=0}^n z^k = 1.$$

Zad. 4. Załóżmy, że $|z_k| = 1$ dla $k = 1, 2, 3, 4$. Pokazać, że liczby zespolone z_k są wierzchołkami prostokąta wtedy i tylko wtedy, gdy $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$.

Zad. 5. Załóżmy, że p jest wielomianem o współczynnikach rzeczywistych i liczba z jest jego pierwiastkiem zespolonym. Pokazać, że $p(\bar{z}) = 0$.