

Podstawy informatyki 2

Politechnika Białostocka - Wydział Elektryczny

Elektrotechnika, semestr II, studia stacjonarne

Rok akademicki 2006/2007

Wykład nr 12 (30.05.2007)

dr inż. Jarosław Forenc

Plan wykładu nr 12

- Program SPICE (PSpice)
- Ogólny algorytm komputerowych metod analizy układów elektrycznych
- Algorytm działania programu SPICE:
 - OP - stałoprądowa analiza punktu pracy
 - DC - krokowa analiza stałoprądowa
 - AC - małosygnałowa analiza częstotliwościowa
 - TRAN - analiza czasowa
 - analiza temperaturowa
- Metoda potencjałów węzłowych
- Metoda potencjałów węzłowych a SPICE
 - konstrukcja macierzy poprzez przeglądanie
- Przykłady

Program SPICE

- **SPICE** jest uniwersalnym programem do symulacji układów elektronicznych, przystosowanym przede wszystkim do analizy układów scalonych

Historia programu SPICE:

- pierwotna wersja programu została opracowana w latach **1968-1970** na Uniwersytecie Kalifornijskim w Berkeley (USA) pod nazwą **CANCER**
- **CANCER** - Computer Analysis of Nonlinear Circuits, Excluding Radiation
- „Excluding Radiation” (?) - w zamówieniach rządowych dotyczących komputerowej analizy układów, wymagano możliwości badania odporności układów na promieniowanie
- w **1971** roku zmieniono nazwę programu na **SPICE**, gdyż poprzednia nazwa zbyt kojarzyła się z nowotworami
- **SPICE** - Simulation Program with Integrated Circuit Emphasis
Program symulacyjny ze szczególnym uwzględnieniem układów scalonych

Program SPICE

Historia programu SPICE:

- w **1971** roku pojawia się wersja **SPICE 1** rozprowadzana jako oprogramowanie public domain
- w stosunku do programu **CANCER**, wprowadzono w tej wersji wiele udoskonaleń:
 - nowe, dokładniejsze, modele tranzystorów: polowego i bipolarnego
 - tworzenie makromodeli definiowanych jako podobowdy i umożliwiających łatwe przenoszenie pewnych stałych struktur do innych projektów
- w **1975** roku ukazuje się **SPICE 2**, nowa wersja programu ma wiele usprawnień:
 - zastosowanie zmodyfikowanej metody potencjałów węzłowych umożliwia wprowadzenie do obwodu idealnych źródeł napięciowych oraz źródeł sterowanych
 - wprowadzenie algorytmu adaptacyjnej zmiany kroku i stabilnego algorytmu interpolacyjnego Eulera umożliwiających poprawę dokładności i szybkości analizy czasowej
 - rozbudowa modeli diod i tranzystorów
- prace prowadzone w latach **1975-1983** prowadzą do opracowania profesjonalnego oprogramowania, określającego nieformalny standard - **Berkeley SPICE 2G.6**

Program SPICE

Historia programu SPICE:

- w 1983 roku program zostaje przetłumaczony na język C
- nowa wersja występuje pod nazwą **SPICE 3A.0** i zawiera wiele zmian:
 - dodanie modeli nowych elementów, m.in. stratnej linii transmisyjnej i nieidealnego klucza
 - udoskonalenie już istniejących modeli elementów półprzewodnikowych, uwzględniając ich nowe konstrukcje i coraz mniejsze rozmiary
 - poprawienie niektórych algorytmów numerycznych, dzięki czemu zmniejszyły się problemy ze zbieżnością
 - dodanie do programu **postprocesora graficznego**
- w 1984 roku pojawia się pierwsza poprawiona wersja **SPICE 3A.7**, będąca podstawą programu **PSpice** - pierwszej komercyjnej realizacji standardu SPICE na komputery PC (Microsim Corp., 1985)
- kolejne wersje programu: **SPICE 3E.2** (1992), **SPICE 3F.3** i **SPICE 3F.5**, stają się podstawą wielu komercyjnych symulatorów przeznaczonych na platformę PC

Program SPICE

Systemy operacyjne:

- MS Windows - dostępnych jest ponad 40 różnych programów,
- Unix/Linux - dostępnych jest kilkanaście aplikacji
- MacOS - dostępnych jest kilka programów

Najważniejsze wersje komercyjne:

- [Multisim](#) (mixed-mode SPICE/XSPICE simulator with microcontroller simulation from [Electronics Workbench](#), now owned by [National Instruments](#))
- [HSPICE](#) (originally from [Meta Software](#), now owned by [Synopsys](#))
- [PSPICE](#) (originally from [MicroSim](#), then [OrCAD](#), now by [Cadence Design Systems](#))
- [SmartSpice](#) ([Silvaco](#))
- [T-Spice](#) ([Tanner EDA](#))
- [Spectre](#) (general purpose SPICE replacement and RF simulator by [Cadence Design Systems](#))
- [Eldo](#) (A SPICE-like Analog-Mixed and RF simulator by [Mentor Graphics](#))
- [UltraSim](#) (FastSPICE tool by [Cadence Design Systems](#))
- [LTspice Free simulator from Linear Technology](#)
- [NanoSim](#) (FastSpice, originally by EPIC, now by [Synopsys](#))

Program SPICE

Najważniejsze wersje komercyjne (c.d.):

- [NSPICE](#) ([Apache Design Solutions](#))
- [HSIM](#) (FastSpice, originally from [Nassda](#), now by [Synopsys](#))
- [B2SPICE](#) (Beige Bag)
- [ICAP/4](#) (analog and mixed-signal circuit simulation by [Intusoft](#))
- [TopSPICE](#) [Mixed-mode Mixed-signal Analog/Digital/Behavioral Simulation] [Penzar Development](#)
- [TINA Design Suite](#) [DesignSoft's Tina Spice Simulator](#)
- [TINA-TI](#) Free simulator based on [DesignSoft's Tina Spice Simulator](#)
- [SPICE OPUS](#) Spice Opus is a mixed-mode simulator with built-in optimization utilities.
- [SIMetrix](#) Schematic editor and simulator from [Catena software](#)
- [Micro-Cap](#) ([Spectrum Software](#))
- [WinECAD](#) (a special french version by [micrelec](#) for educational market)
- [edspice](#) (from [edwinxp](#) owned by [Visionics](#))

Wersje Open Source :

- [ngspice](#)
- [tclspice](#)

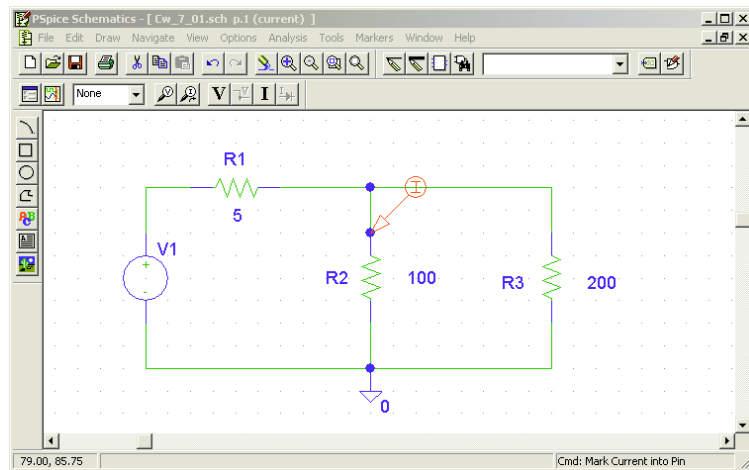
PSPICE

- **PSpice Student Version Release 9.1 (luty 2000)** - program wykorzystywany na zajęciach laboratoryjnych z przedmiotu „Zastosowanie Informatyki w Elektrotechnice” (sem. IV i sem V)
- wersja „studencka” ma kilka ograniczeń:
 - 64 nodes
 - 10 transistors
 - 65 digital primitive devices
 - you can place a maximum of 50 parts on a schematic design

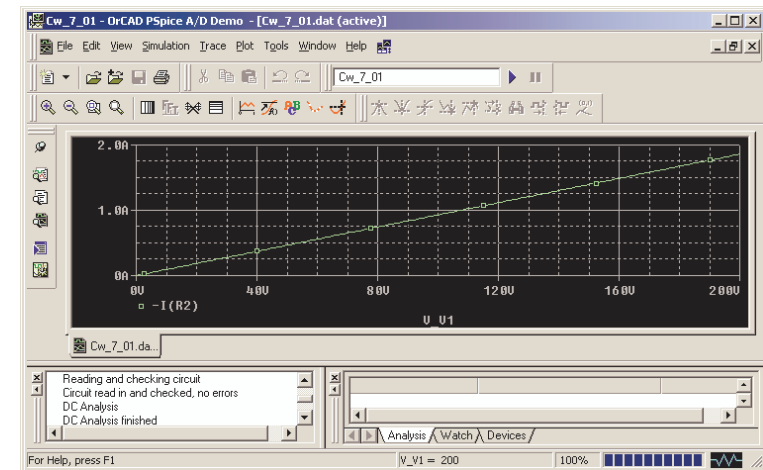
Skąd ściągnąć PSpice Student Version Release 9.1 (27,2 MB)?

- WebEE - <http://www.web-ee.com/Downloads/Simulator/91pspstu.exe>
- <http://www-ibt.etec.uni-karlsruhe.de/linette/pspice/download/91pspstu.exe>
- <http://www.smc.fc.pl/pbwe/download.php?cmd=click&id=151>

PSpice Schematics



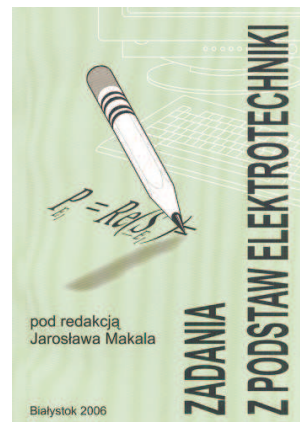
PSpice A/D



Rozwiązania zadań z Podstaw Elektrotechniki w PSpice



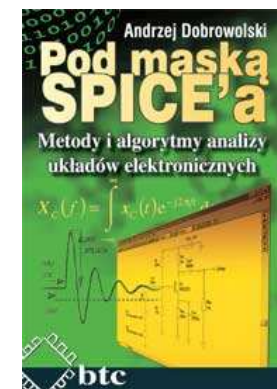
zadania na dołączonej płycie CD



http://we.pb.edu.pl/~ketim/ketim-md/mat_wspolne/cd.zip

Literatura związana z programem SPICE

1. Dobrowolski A.: „Pod maską SPICE’a. Metody i algorytmy analizy układów elektronicznych”, Wydawnictwo BTC, Warszawa, 2004.



Literatura związana z programem SPICE

1. Dobrowolski A.: „Pod maską SPICE’a. Metody i algorytmy analizy układów elektronicznych”, Wydawnictwo BTC, Warszawa, 2004.
2. Walczak J., Pasko M.: „Komputerowa analiza obwodów elektrycznych z wykorzystaniem programu SPICE: zagadnienia podstawowe”, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice, 2005.
3. Walczak J., Pasko M.: „Zastosowanie programu SPICE w analizie obwodów elektrycznych i elektronicznych”, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice, 2003.
4. Wojtuszkiewicz K., Zachara Z.: „PSpice. Symulacje wzmacniaczy dyskretnych”, Wydawnictwo MIKOM, Warszawa, 2002.
5. Zachara Z., Wojtuszkiewicz K.: „PSpice. Przykłady praktyczne”, Wydawnictwo MIKOM, Warszawa, 2000.
6. Król A., Moczko J.: „PSpice. Symulacja i optymalizacja układów elektronicznych”, Wydawnictwo NAKOM, Poznań, 2000.

Literatura związana z programem SPICE

7. Zimny P., Karwowski K.: „SPICE: klucz do elektrotechniki: instrukcja, program, przykłady”, Politechnika Gdańska, Gdańsk, 1998.
8. Baranowski K., Welo A., Matuszyk M.: „Symulacja układów elektronicznych PSpice”, Wydawnictwo MIKOM, Warszawa, 1996.
9. Porębski J., Korohoda P.: „SPICE: program analizy nieliniowej układów elektronicznych”, WNT, Warszawa, 1996.
10. Izydorczyk J.: „PSpice. Komputerowa symulacja układów elektronicznych”, Helion, Gliwice, 1993.
11. Napieralski A.: „Analiza i projektowanie komputerowe układów elektronicznych przy pomocy programu SPICE”, Politechnika Łódzka, Łódź, 1993.

Środowisko SPICE (1/2)

- Edytor schematów:
 - specjalizowany program graficzny umożliwiający sprawne rysowanie schematów analizowanych obwodów
 - zazwyczaj zawiera także wygodny interfejs służący do sterowania analizą
 - wynikiem pracy edytora schematów jest plik tekstowy (skrypt), który będzie analizowany przez moduł symulacyjny
- Specjalizowany edytor tekstowy:
 - umożliwia „ręczne” sterowanie procesem symulacji poprzez ingerencję w skrypt opisujący obwód
 - pozwala na przeglądanie wyników analizy w trybie tekstowym i umożliwia wygodny ich eksport do innych programów

Środowisko SPICE (2/2)

- Postprocesor graficzny:
 - umożliwia obejrzenie, sformatowanie oraz przeliczenie i opracowanie wyników analizy
 - najczęściej jest to edytor wykresów, wzbogacony o wiele funkcji matematycznych, statystycznych, pomiarowych oraz do cyfrowego przetwarzania sygnałów
- Symulator:
 - przeprowadza analizę obwodu
- Co zdecydowało o popularności SPICE’a?
 - połączenie ze sobą szeregu bardzo dobrych algorytmów
 - elastyczne i przenośne oprogramowanie
 - uczynienie oprogramowania otwartym i bezpłatnym

Ogólny algorytm komputerowych metod analizy ukł. elek.

1. Sformułowanie macierzowego równania równowagi:

- do automatycznego sformułowania macierzowego równania równowagi stacjonarnego, skupionego układu elektronicznego, stosowane są metody:
 - węzłowa
 - oczkowa
 - równań hybrydowych
 - zmiennych stanu
- najczęściej stosowana jest metoda węzłowa lub jej modyfikacje
- o zastosowaniu metody węzłowej zdecydowały m.in.:
 - łatwość programowego formułowania równań
 - operowanie wielkościami opisanymi prądowo: $i = f(u)$
 - operowanie wielkościami mającymi bezpośrednią interpretację fizyczną (konduktancja, transkonduktancja)
- podstawą programu SPICE jest zmodyfikowana metoda węzłowa

Ogólny algorytm komputerowych metod analizy ukł. elek.

2. Rozwiązanie macierzowego równania równowagi za pomocą metod numerycznych:

- metody numeryczne rozwiązywania macierzowego równania równowagi dzielą się na:
 - metody dokładne
 - metody iteracyjne
- wyznacznikowa metoda Cramera (metoda dokładna):
 - najprostsza i najmniej efektywna
 - daje szybko wynik przy niewielkiej liczbie równań
 - w przypadku większej liczby równań (ok. kilkudziesięciu) staje się nieprzydatna, nawet przy zastosowaniu komputerów
- metoda Gaussa-Jordana (metoda dokładna):
 - przekształcenie macierzy do postaci diagonalnej
- metoda eliminacji Gaussa (metoda dokładna):
 - przekształcenie macierzy do postaci trójkątnej górnej
 - charakteryzuje się bardzo małym nakładem obliczeniowym

Ogólny algorytm komputerowych metod analizy ukł. elek.

- metoda rozkładu LU (metoda dokładna):
 - modyfikacja metody Gaussa
 - charakteryzuje się bardzo małym nakładem obliczeniowym
- w programie SPICE stosowana jest metoda rozkładu LU w połączeniu z techniką macierzy rzadkich:
 - metoda rozkładu LU umożliwia dużą redukcję nakładów obliczeniowych w przypadku rozwiązywania tego samego obwodu przy wielokrotnie zmieniającym się wymuszeniu (analizy czasowe)
 - technika macierzy rzadkich skraca czas obliczeń w przypadku, gdy większość elementów macierzy opisującej układ ma zerowe wartości (tak jak w większości układów elektronicznych)

Ogólny algorytm komputerowych metod analizy ukł. elek.

■ Analiza układów nieliniowych:

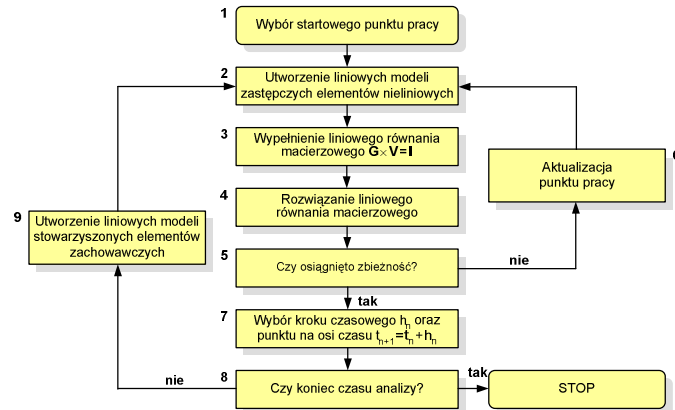
- konieczne jest rozwiązanie układu nieliniowych równań algebraicznych
- stosowana jest metoda Newtona-Raphsona lub metoda linearyzacji odcinkowej:
 - działanie tych metod sprowadza się do linearyzacji elementów nieliniowych w danym kroku iteracji
 - otrzymany układ równań liniowych można rozwiązać jedną z przedstawionych wcześniej metod
 - po rozwiązaniu równań dla danego kroku iteracji modyfikuje się współczynniki równań i dokonuje ich ponownego rozwiązania
 - proces iteracyjny jest kończony po otrzymaniu żądanej dokładności

■ Analiza układów w dziedzinie czasu:

- stosowane są metody całkowania numerycznego
- elementy zachowawcze „zastępowane są” ich modelami stowarzyszonymi
- układ dynamiczny zastępowany jest więc stowarzyszonym układem stałoprądowym (dla jednego kroku czasowego), który może być dalej analizowany, np. metodą węzłową

Algorytm działania programu SPICE (1/5)

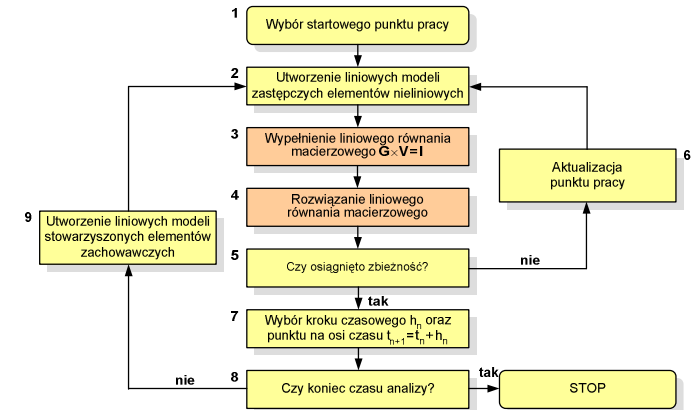
- Ogólny algorytm programu SPICE



źródło: A. Dobrowolski: „Pod maską SPICE’a”

Algorytm działania programu SPICE (2/5)

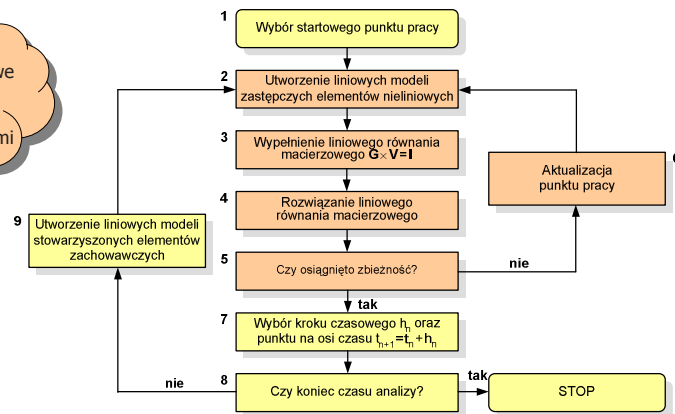
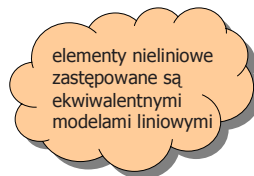
- Podstawą działania programu jest węzłowa analiza obwodu stałoprądowego



źródło: A. Dobrowolski: „Pod maską SPICE’a”

Algorytm działania programu SPICE (3/5)

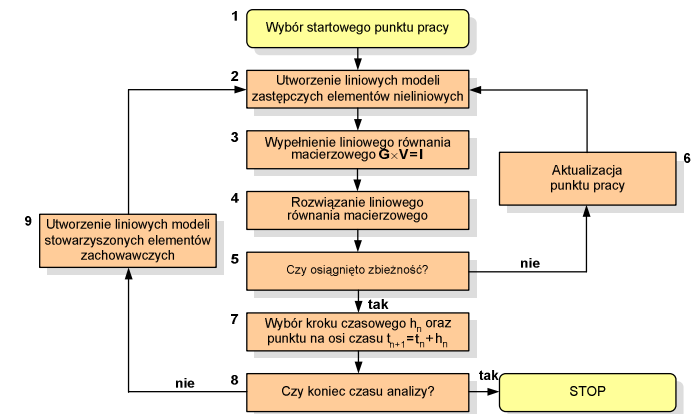
- Pętla wewnętrzna (iteracji nieliniowej) poszukuje rozwiązania dla obwodów nieliniowych



źródło: A. Dobrowolski: „Pod maską SPICE’a”

Algorytm działania programu SPICE (4/5)

- Pętla zewnętrzna (czasowa) wyznacza kolejne punkty na osi czasu



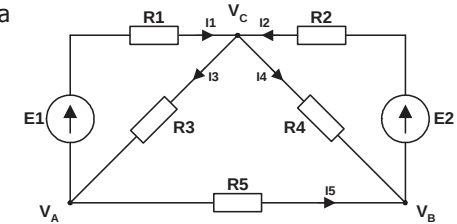
źródło: A. Dobrowolski: „Pod maską SPICE’a”

Algorytm działania programu SPICE (5/5)

1. Wczytanie elementów obwodu z pliku wejściowego
2. Stworzenie równań macierzowych
 - konstrukcja macierzy poprzez przeglądanie
 - zastosowanie predefiniowanych szablonów
3. Wykonanie analiz, których dyrektywy zapisane są w pliku wejściowym
 - podstawowe analizy:
 - stałoprądowa analiza punktu pracy, OP - Operating Point Analysis
 - krokowa analiza stałoprądowa, DC - Direct Current Sweep Analysis
 - małosygnałowa analiza częstotliwościowa, AC - Alternating Current Analysis
 - analiza czasowa, Tran - Transient Analysis
 - analiza temperaturowa - Temperature Analysis
 - dodatkowe analizy:
 - analiza wyznaczająca stałoprądową transmitancję układu, TF - Transfer Function
 - analiza zniekształceń nieliniowych, Disto - Distortion Analysis
 - analiza szumowa, Noise - Noise Analysis
 - analiza harmoniczna przebiegów czasowych, Four - Fourier Analysis
 - małoprzyrostowa analiza wrażliwości, Sens - Sensitivity Analysis

Metoda potencjałów węzłowych

- Metody numeryczne stosowane do analizy układów elektronicznych sprowadzają się do szeregu **analiz stałoprądowych** obwodu liniowego.
- Gałąź obwodu elektrycznego** tworzy jeden lub kilka połączonych ze sobą szeregowo elementów idealnych. Cechą gałęzi jest jej prąd.
- Węzeł obwodu elektrycznego** nazywamy końcówkę (zaczep) wyprowadzoną na zewnątrz, do której jest lub może być przyłączona następna gałąź lub kilka gałęzi. Węzłowi obwodu przyporządkowany jest potencjał.
- Każda gałąź obwodu ograniczona jest parą węzłów.
- Metoda potencjałów węzłowych:
 - metoda węzłowa
 - metoda napięć węzłowych



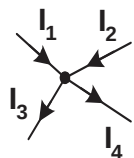
Metoda potencjałów węzłowych

- Metoda węzłowa opiera się na I Prawie Kirchhoffa:

„Suma prądów wpływających do węzła równa jest sumie prądów od niego odpływających”

lub

„Algebraiczna suma prądów w węźle jest równa zero”



$$I_1 + I_2 = I_3 + I_4 \quad (1)$$

$$I_1 + I_2 - I_3 - I_4 = 0 \quad (2)$$

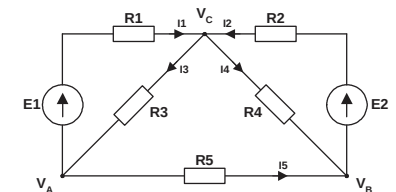
Metoda potencjałów węzłowych

- Dla każdego węzła w obwodzie można napisać równanie na podstawie I Prawa Kirchhoffa:
 - dla obwodu mającego n węzłów można napisać n równań prądowych

$$\begin{aligned} -I_1 + I_3 - I_5 &= 0 \\ -I_2 + I_4 + I_5 &= 0 \\ I_1 + I_2 - I_3 - I_4 &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

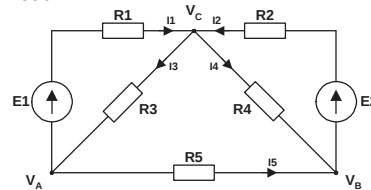
- w równaniach tych każdy prąd gałęziowy występuje dwukrotnie - raz ze znakiem minus, a raz ze znakiem plus
- dodanie równań stronami spowoduje zredukowanie się prądów:

$$\begin{aligned} -I_1 + I_3 - I_5 &= 0 \\ -I_2 + I_4 + I_5 &= 0 \\ I_1 + I_2 - I_3 - I_4 &= 0 \\ \hline 0 &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$



Metoda potencjałów węzłowych

- równania otrzymane na podstawie I Prawa Kirchhoffa dla wszystkich węzłów tworzą układ równań liniowo zależnych
- każde równanie jest liniową kombinacją pozostałych $n - 1$ równań
- można więc stwierdzić, że dla obwodu o n węzłach istnieje $n - 1$ równań liniowo niezależnych
- obwód zawierający n węzłów ma $n - 1$ węzłów niezależnych, pozostały węzeł nazywany jest **węzłem odniesienia**
- otrzymanie układu równań liniowo niezależnych na podstawie I Prawa Kirchhoffa wymaga więc zapisania równań prądowych dla wszystkich niezależnych węzłów obwodu



Metoda potencjałów węzłowych - Algorytm praktyczny

- zamieniamy źródła napięciowe na prądowe
- dowolny węzeł uznajemy za węzeł odniesienia o potencjale równym zeru
- dla każdego z pozostałych węzłów układamy po jednym równaniu

$$\begin{cases} G_{AA} \cdot V_A + G_{AB} \cdot V_B = I_A \\ G_{BA} \cdot V_A + G_{BB} \cdot V_B = I_B \end{cases} \quad (5)$$

gdzie:

V_A, V_B - potencjały węzłów,

G_{AA}, G_{BB} - konduktancje własne węzłów (suma konduktancji zbiegających się w danym węźle)

G_{AB}, G_{BA} - konduktancje wzajemne węzłów ze znakiem minus

I_A, I_B - prądy węzłowe - suma algebraiczna źródeł prądowych zbiegających w danym węźle, ze znakiem „+” jeśli prąd dopływa do węzła lub ze znakiem „-”, jeśli prąd odpływa z węzła

- obliczamy wartości potencjałów węzłowych
- obliczamy prądy w gałęziach na podstawie prawa Ohma:
 - potencjał węzła, od którego prąd odpływa bierzemy ze znakiem „+”
 - potencjał węzła, do którego prąd wpływa bierzemy ze znakiem „-”

Metoda potencjałów węzłowych - Przykład

- zamieniamy źródła napięciowe na prądowe
- dowolny węzeł uznajemy za węzeł odniesienia o potencjale równym zeru
- dla pozostałych węzłów układamy po jednym równaniu:

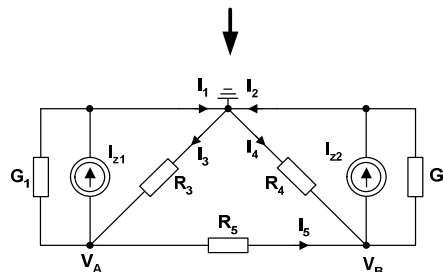
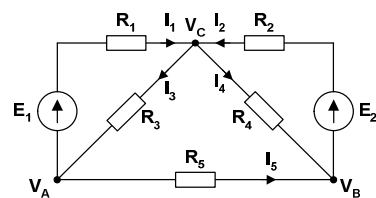
$$\begin{cases} G_{AA} \cdot V_A + G_{AB} \cdot V_B = I_A \\ G_{BA} \cdot V_A + G_{BB} \cdot V_B = I_B \end{cases} \quad (6)$$

- konduktancje własne:

$$\begin{aligned} G_{AA} &= G_1 + G_3 + G_5 \\ G_{BB} &= G_2 + G_4 + G_5 \end{aligned} \quad (7)$$

- konduktancje wzajemne:

$$\begin{aligned} G_{AB} &= -G_5 \\ G_{BA} &= -G_5 \end{aligned} \quad (8)$$



Metoda potencjałów węzłowych - Przykład

- prądy węzłowe:

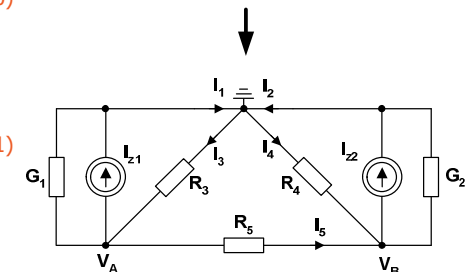
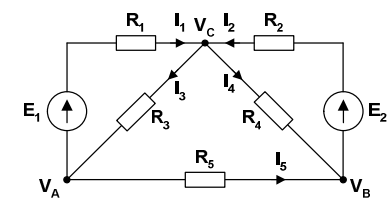
$$\begin{aligned} I_A &= -I_{z1} \\ I_B &= -I_{z2} \end{aligned} \quad (9)$$

- rozwiązując układ równań:

$$\begin{cases} G_{AA} \cdot V_A + G_{AB} \cdot V_B = I_A \\ G_{BA} \cdot V_A + G_{BB} \cdot V_B = I_B \end{cases} \quad (10)$$

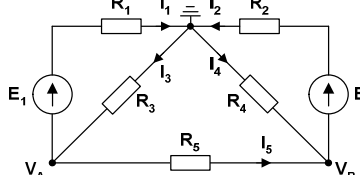
wyznaczamy wartości potencjałów węzłowych:

$$\begin{aligned} V_A &= \dots \\ V_B &= \dots \end{aligned} \quad (11)$$



Metoda potencjałów węzłowych - Przykład

- układ równań można wyznaczyć bezpośrednio, bez zamiany źródeł napięciowych na prądowe:

$$\begin{cases} V_A \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5} \right) - V_B \cdot \left(\frac{1}{R_5} \right) = -\frac{E_1}{R_1} \\ V_B \cdot \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} \right) - V_A \cdot \left(\frac{1}{R_5} \right) = -\frac{E_2}{R_2} \end{cases} \quad (12)$$


- po wyznaczeniu potencjałów obliczamy prądy gałęziowe:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{V_A - 0 + E_1}{R_1}, & I_2 &= \frac{V_B - 0 + E_2}{R_2}, & I_3 &= \frac{0 - V_A}{R_3} \\ I_4 &= \frac{0 - V_B}{R_4}, & I_5 &= \frac{V_A - V_B}{R_5} \end{aligned} \quad (13)$$

Metoda potencjałów węzłowych - Algorytm dla komputera

- Algorytm dostosowany do obliczeń komputerowych
 - w ogólnym przypadku obwodu elektrycznego mającego n węzłów niezależnych, potencjały wyznaczone są z układu równań:

$$\begin{cases} G_{11}V_1 + G_{12}V_2 + \dots + G_{1n}V_n = I_{zr1} \\ G_{21}V_1 + G_{22}V_2 + \dots + G_{2n}V_n = I_{zr2} \\ \dots \dots \dots \\ G_{n1}V_1 + G_{n2}V_2 + \dots + G_{nn}V_n = I_{zrn} \end{cases} \quad (14)$$

- stosując metodę macierzową układ (10) możemy zapisać w postaci:

$$\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \dots & G_{1n} \\ G_{21} & G_{22} & \dots & G_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_{n1} & G_{n2} & \dots & G_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \dots \\ V_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{z1} \\ I_{z2} \\ \dots \\ I_{zn} \end{bmatrix} \quad \text{lub} \quad \mathbf{G} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{I}_z \quad (15)$$

Metoda potencjałów węzłowych - Algorytm dla komputera

gdzie:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \dots & G_{1n} \\ G_{21} & G_{22} & \dots & G_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_{n1} & G_{n2} & \dots & G_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{- macierz konduktancji własnych i wzajemnych}$$

będących macierzą kwadratową symetryczną; na głównej przekątnej występują konduktancje własne węzłów ze znakiem plus, poza główną przekątną konduktancje wzajemne ze znakiem minus

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \dots \\ V_n \end{bmatrix} \quad \text{- macierz potencjałów, będąca macierzą kolumnową o liczbie wierszy równej } n, \text{ tzn. liczbie } n \text{ węzłów liniowo niezależnych}$$

$$\mathbf{I}_z = \begin{bmatrix} I_{z1} \\ I_{z2} \\ \dots \\ I_{zn} \end{bmatrix} \quad \text{- macierz prądów źródłowych, w węzłach będąca macierzą kolumnową o liczbie wierszy równej liczbie węzłów liniowo niezależnych obwodu}$$

Metoda potencjałów węzłowych - Algorytm dla komputera

- w celu wyznaczenia poszukiwanej macierzy potencjałów $\mathbf{V}$ mnożymy lewostronnie równanie:

$$\mathbf{G} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{I}_z \quad (16)$$

przez macierz odwrotną macierzy konduktancji własnych i wzajemnych:

$$\mathbf{G}^{-1} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{G}^{-1} \cdot \mathbf{I}_z \quad (17)$$

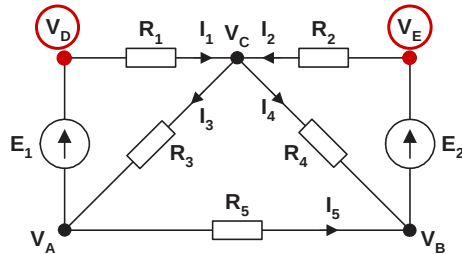
otrzymując:

$$\mathbf{V} = \mathbf{G}^{-1} \cdot \mathbf{I}_z \quad (18)$$

- znając wartości potencjałów wyznaczamy prądy gałęziowe z zależności napisanych na podstawie prawa Ohma dla poszczególnych gałęzi rozpatrywanego obwodu

Metoda potencjałów węzłowych a SPICE

- W programie SPICE przez pojęcie **węzła** należy rozumieć **połączenie utworzone przez co najmniej dwa elementy**:



- W programie SPICE **gałęzią** jest **odcinek obwodu łączący dwa sąsiednie węzły**, czyli odcinek, w którym prąd w dowolnej chwili ma tę samą wartość

Metoda potencjałów węzłowych a SPICE

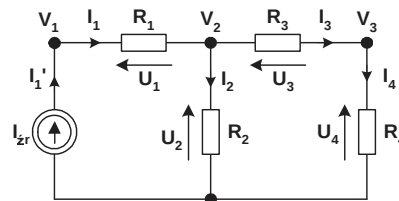
- Układ równań obwodu tworzony jest w następujących krokach:
 - wyróżniamy w obwodzie jeden węzeł odniesienia (najczęściej jest to węzeł masy)
 - dla wszystkich pozostałych węzłów zapisujemy równania wynikające z I prawa Kirchhoffa
 - korzystając z równań opisujących elementy zawarte w gałęziach obwodu, eliminujemy z równań I prawa Kirchhoffa prądy gałęziowe przez napięcia gałęziowe
 - w otrzymanych równaniach eliminujemy napięcia gałęziowe przez potencjały węzłowe
 - obliczamy prądy gałęziowe na podstawie prawa Ohma
- Stosując metodę węzłową do obwodu o n węzłach, otrzymuje się układ $n - 1$ równań liniowych z $n - 1$ niewiadomymi, którymi są potencjały węzłowe obwodu

Metoda potencjałów węzłowych a SPICE

- Przykład:

- oznaczamy w obwodzie węzeł masy
- dla pozostałych węzłów zapisujemy równania wynikające z I prawa Kirchhoffa:

$$\begin{cases} I_1' - I_1 = 0 \\ I_1 - I_2 - I_3 = 0 \\ I_3 - I_4 = 0 \end{cases} \quad (19)$$



- eliminujemy z równań prądy gałęziowe zastępując je napięciami gałęziowymi

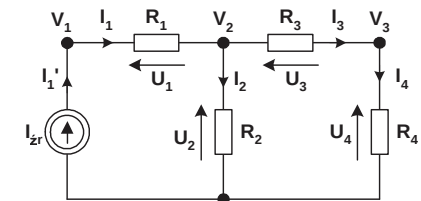
$$\begin{cases} I_{zr} - \frac{U_1}{R_1} = 0 \\ \frac{U_1}{R_1} - \frac{U_2}{R_2} - \frac{U_3}{R_3} = 0 \\ \frac{U_3}{R_3} - \frac{U_4}{R_4} = 0 \end{cases} \quad (20)$$

Metoda potencjałów węzłowych a SPICE

- Przykład:

- zastępujemy napięcia gałęziowe przez potencjały węzłowe:

$$\begin{cases} I_{zr} - \frac{V_1 - V_2}{R_1} = 0 \\ \frac{V_1 - V_2}{R_1} - \frac{V_2 - 0}{R_2} - \frac{V_2 - V_3}{R_3} = 0 \\ \frac{V_2 - V_3}{R_3} - \frac{V_3 - 0}{R_4} = 0 \end{cases} \quad (20)$$



- zastępujemy rezystancje przez konduktancje:

$$\begin{cases} I_{zr} - G_1 V_1 + G_1 V_2 = 0 \\ G_1 V_1 - G_1 V_2 - G_2 V_2 - G_3 V_2 + G_3 V_3 = 0 \\ G_3 V_2 - G_3 V_3 - G_4 V_3 = 0 \end{cases} \quad (21)$$

Metoda potencjałów węzłowych a SPICE

■ Przykład:

- po pomnożeniu obustronnie przez -1 i uporządkowaniu otrzymujemy:

$$\begin{cases} G_1 V_1 - G_1 V_2 & = I_{zr} \\ -G_1 V_1 + (G_1 + G_2 + G_3) V_2 - G_3 V_3 & = 0 \\ -G_3 V_2 + (G_3 + G_4) V_3 & = 0 \end{cases} \quad (22)$$

- w konwencji macierzowej układ (22) można zapisać następująco:

$$\begin{bmatrix} G_1 & -G_1 & 0 \\ -G_1 & G_1 + G_2 + G_3 & -G_3 \\ 0 & -G_3 & G_3 + G_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{zr} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{lub} \quad \mathbf{G} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{I} \quad (23)$$

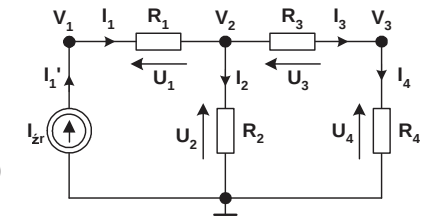
gdzie: $\mathbf{V}$ - wektor kolumnowy potencjałów węzłowych (rozwiązanie układu)
 $\mathbf{I}$ - wektor kolumnowy prądów, nazywany wektorem wymuszeń;
 jest traktowany jako znany i reprezentuje prądy gałęziowe generowane przez źródła prądowe
 $\mathbf{G}$ - konduktancyjna macierz kwadratowa; traktowana jako znana, reprezentuje liniowe charakterystyki prądowo-napięciowe wszystkich elementów obwodu

Metoda potencjałów węzłowych a SPICE

■ Przykład:

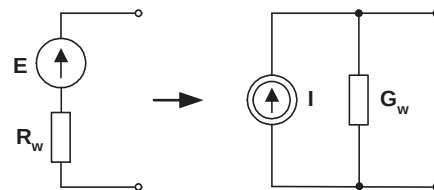
- obliczenie wartości prądów na podstawie prawa Ohma:

$$\begin{aligned} I_1' &= I_{zr} \\ I_1 &= \frac{V_1 - V_2}{R_1} \quad \text{lub} \quad I_1 = G_1 \cdot (V_1 - V_2) \\ I_2 &= \frac{V_2 - 0}{R_2} \quad \text{lub} \quad I_2 = G_2 \cdot (V_2 - 0) \\ I_3 &= \frac{V_2 - V_3}{R_3} \quad \text{lub} \quad I_3 = G_3 \cdot (V_2 - V_3) \\ I_4 &= \frac{V_3 - 0}{R_4} \quad \text{lub} \quad I_4 = G_4 \cdot (V_3 - 0) \end{aligned} \quad (24)$$



Metoda potencjałów węzłowych a SPICE

- W klasycznej metodzie węzłowej jedynym typem źródła niezależnego, które można zastosować jest źródło prądowe
- nie jest to dużym ograniczeniem, gdyż każde rzeczywiste źródło napięciowe można przekształcić do postaci prądowej, korzystając z twierdzenia Nortona



$$I = \frac{E}{R_w} \quad (25)$$

$$G_w = \frac{1}{R_w} \quad (26)$$

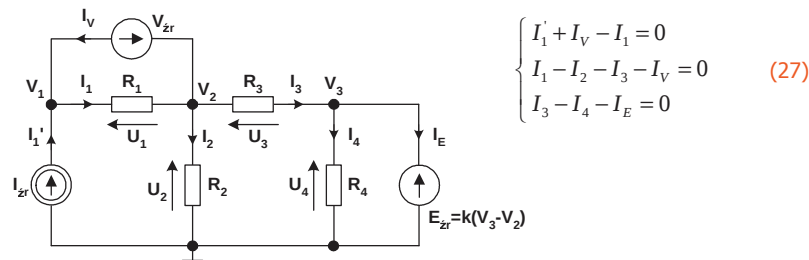
- w przypadku idealnego źródła napięcia, przed przekształceniem go do postaci prądowej, należy połączyć szeregowo źródło idealne z pomijalnie małą rezystancją

Metoda potencjałów węzłowych a SPICE

- W przypadku źródeł sterowanych, naturalnym typem źródła do analizy węzłowej jest źródło prądowe sterowane napięciem
- pozostałe typy źródeł można zastosować, dokonując modyfikacji obwodu tak, aby sterowane źródła napięciowe były połączone szeregowo z niezerową rezystancją, a prądy sterujące źródła płynęły przez pewien element dwójnikowy
- Przekształcanie źródeł nie jest konieczne w przypadku zastosowania tzw. **zmodyfikowanej metody węzłowej** (ang. modified nodal approach)

Zmodyfikowana metoda potencjałów węzłowych

- Sposób tworzenia równań obwodu, w przypadku zmodyfikowanej metody węzłowej jest zbliżony do stosowanego w metodzie oryginalnej
- Przykład:
 - wyróżniamy w obwodzie węzeł odniesienia
 - dla pozostałych węzłów zapisujemy równania zgodnie z I prawem Kirchhoffa:



Zmodyfikowana metoda potencjałów węzłowych

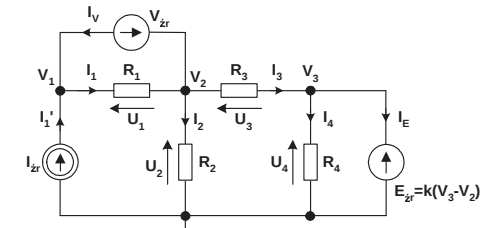
- zastępujemy prądy źródłowe przez napięcia gałęziowe:
- zastępujemy napięcia gałęziowe przez potencjały węzłowe:

$$\begin{cases} I_{zr} + I_V - \frac{U_1}{R_1} = 0 \\ \frac{U_1}{R_1} - \frac{U_2}{R_2} - \frac{U_3}{R_3} - I_V = 0 \\ \frac{U_3}{R_3} - \frac{U_4}{R_4} - I_E = 0 \end{cases} \quad (28)$$

$$\begin{cases} I_{zr} + I_V - \frac{V_1 - V_2}{R_1} = 0 \\ \frac{V_1 - V_2}{R_1} - \frac{V_2 - 0}{R_2} - \frac{V_2 - V_3}{R_3} - I_V = 0 \\ \frac{V_2 - V_3}{R_3} - \frac{V_3 - 0}{R_4} - I_E = 0 \end{cases} \quad (29)$$

- zastępujemy rezystancje przez konduktancje:

$$\begin{cases} I_{zr} + I_V - G_1 V_1 + G_1 V_2 = 0 \\ G_1 V_1 - G_1 V_2 - G_2 V_2 - G_3 V_2 + G_3 V_3 - I_V = 0 \\ G_3 V_2 - G_3 V_3 - G_4 V_3 - I_E = 0 \end{cases} \quad (30)$$



Zmodyfikowana metoda potencjałów węzłowych

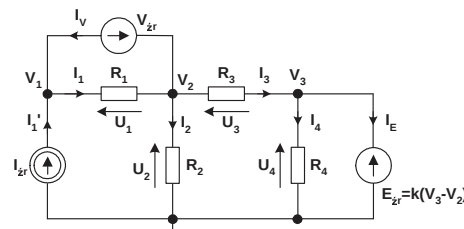
- po uporządkowaniu układu otrzymujemy trzy równania dla trzech niezależnych węzłów, ale z pięcioma niewiadomymi:

$$\begin{cases} G_1 V_1 & -G_1 V_2 & & -I_V & = I_{zr} \\ -G_1 V_1 & +(G_1 + G_2 + G_3)V_2 & -G_3 V_3 & +I_V & = 0 \\ & -G_3 V_2 & +(G_3 + G_4)V_3 & +I_E & = 0 \end{cases} \quad (31)$$

gdzie: I_V - prąd płynący przez niezależne źródło prądowe
 I_E - prąd płynący przez źródło napięciowe sterowane napięciem

- otrzymany układ równań należy uzupełnić o równania opisujące niezależne źródło napięcia oraz źródło sterowane:

$$\begin{cases} V_{zr} = V_2 - V_1 \\ E_{zr} = V_3 - 0 = k \cdot (V_3 - V_2) \end{cases} \quad (32)$$



Zmodyfikowana metoda potencjałów węzłowych

- układy (31) i (32) tworzą razem układ 5 równań opisujących analizowany obwód:

$$\begin{cases} G_1 V_1 & -G_1 V_2 & & -I_V & = I_{zr} \\ -G_1 V_1 & +(G_1 + G_2 + G_3)V_2 & -G_3 V_3 & +I_V & = 0 \\ & -G_3 V_2 & +(G_3 + G_4)V_3 & +I_E & = 0 \\ -V_1 & +V_2 & & & = V_{zr} \\ & kV_2 & +(1-k)V_3 & & = 0 \end{cases} \quad (33)$$

- postać macierzowa układu (33) jest następująca:

$$\begin{bmatrix} G_1 & -G_1 & 0 & -1 & 0 \\ -G_1 & G_1 + G_2 + G_3 & -G_3 & 1 & 0 \\ 0 & -G_3 & G_3 + G_4 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 1-k & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ I_V \\ I_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{zr} \\ 0 \\ 0 \\ V_{zr} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{lub} \quad \mathbf{G}' \cdot \mathbf{V}' = \mathbf{I}' \quad (34)$$

gdzie: $\mathbf{G}'$ - zmodyfikowana macierz konduktancyjna,
 $\mathbf{V}'$ - uogólniony wektor potencjałów węzłowych (zawierający oprócz potencjałów węzłowych, także prądy płynące przez źródła napięciowe
 $\mathbf{I}'$ - uogólniony wektor wymuszeń

Zmodyfikowana metoda potencjałów węzłowych

- W zmodyfikowanej metodzie potencjałów węzłowych poszukiwanymi zmiennymi opisującymi stan układu, oprócz **potencjałów węzłowych**, są **prądy płynące przez źródła napięcia**

$$\begin{bmatrix} G_1 & -G_1 & 0 & -1 & 0 \\ -G_1 & G_1 + G_2 + G_3 & -G_3 & 1 & 0 \\ 0 & -G_3 & G_3 + G_4 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 1 - k & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ I_V \\ I_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{zr} \\ 0 \\ 0 \\ V_{zr} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (34)$$

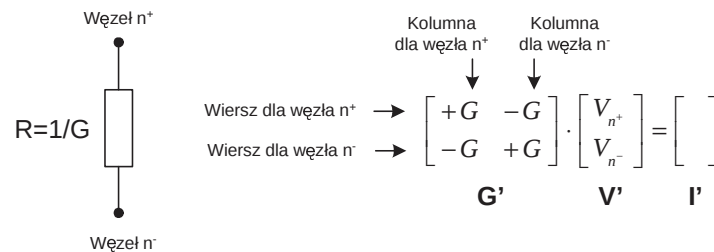
- Stosując zmodyfikowaną metodę węzłową, można bez przekształceń analizować obwody, które zawierają wszystkie cztery typy źródeł sterowanych

Konstrukcja macierzy poprzez przeglądanie

- w programie SPICE równania macierzowe obwodu tworzone są na bieżąco podczas wczytywania elementów z pliku wejściowego
- do tworzenia macierzy obwodu stosowana jest **metoda konstrukcji macierzy poprzez przeglądanie** (ang. *matrix construction by inspection*)
- metoda ta polega na:
 - tworzeniu macierzy
 - identyfikacji położenia rozpatrywanego elementu
 - aktualizacji odpowiednich komórek macierzy, gdy tylko węzły podłączone do elementu zostaną zidentyfikowane
- metoda konstrukcji macierzy poprzez przeglądanie opiera się na predefiniowanych **szablonach** określających położenie konduktancji i prądów odpowiednich elementów w równaniu macierzowym
- każdy element stosowany w programie SPICE ma przypisany odpowiedni szablon
- podstawowe elementy to:
 - rezystor
 - niezależne źródło prądowe, niezależne źródło napięciowe
 - źródło prądowe sterowane prądem, źródło prądowe sterowane napięciem
 - źródło napięciowe sterowane prądem, źródło napięciowe sterowane napięciem

Konstrukcja macierzy poprzez przeglądanie

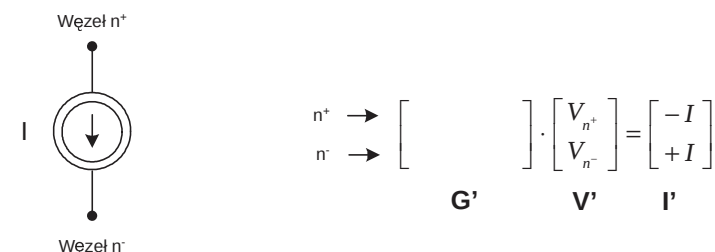
- Szablon rezystora:



- UWAGA:** przez element prąd płynie od węzła n^+ do węzła n^-

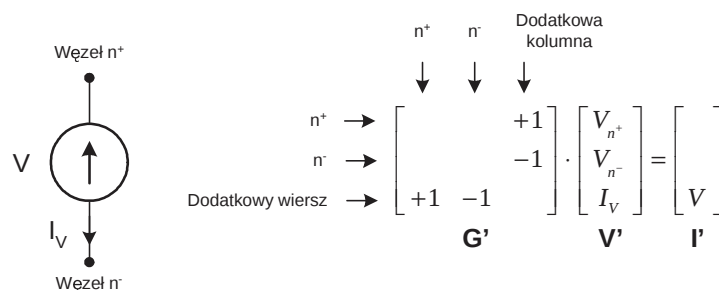
Konstrukcja macierzy poprzez przeglądanie

- Szablon niezależnego źródła prądowego:



Konstrukcja macierzy poprzez przeglądanie

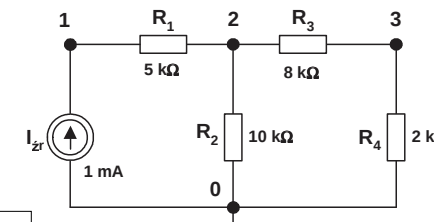
- Szablon niezależnego źródła napięciowego:



Konstrukcja macierzy poprzez przeglądanie

- Przykład konstrukcji macierzy przez przeglądanie
 - dla poniższego schematu obwodu elektrycznego układ ten w standardzie SPICE jest opisany następującą listą połączeń (ang. netlist):

```
Izr 0 1 1m
R1 1 2 5k
R2 2 0 10k
R3 2 3 8k
R4 3 0 2k
.END
```

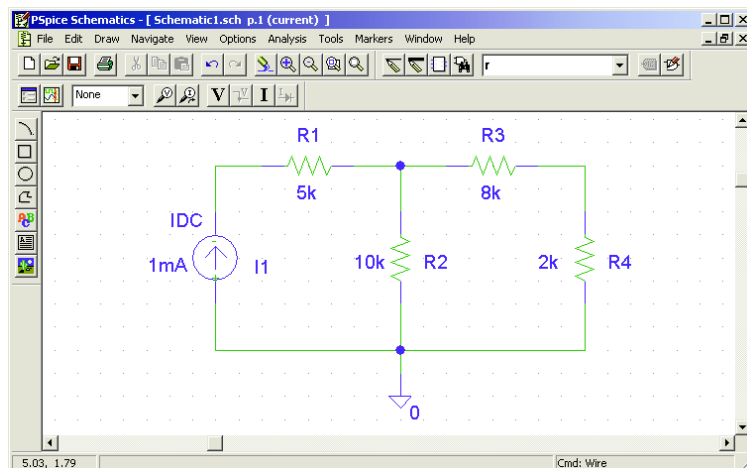


* Schematics Netlist *

```
I_I1 0 $N_0001 DC 1m
R_R1 $N_0001 $N_0002 5k
R_R2 $N_0002 0 10k
R_R3 $N_0002 $N_0003 8k
R_R4 $N_0003 0 2k
```

Konstrukcja macierzy poprzez przeglądanie

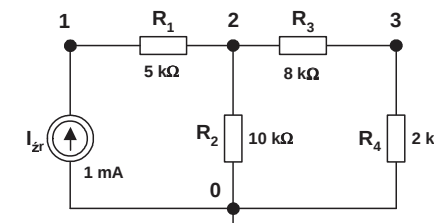
- Przykład konstrukcji macierzy przez przeglądanie



Konstrukcja macierzy poprzez przeglądanie

- Przykład konstrukcji macierzy przez przeglądanie
 - dla poniższego schematu obwodu elektrycznego układ ten w standardzie SPICE jest opisany następującą listą połączeń (ang. netlist):

```
Izr 0 1 1m
R1 1 2 5k
R2 2 0 10k
R3 2 3 8k
R4 3 0 2k
.END
```



- Dodanie źródła prądowego:

- gdy SPICE odczyta źródło prądowe I_{zr} podłączone do węzłów 0 i 1, to korzystając z szablonu niezależnego źródła prądowego, tworzy startową macierz konduktancyjną o wymiarze 2×2 :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_0 \\ V_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1m \\ +1m \end{bmatrix} \quad (35)$$

Konstrukcja macierzy poprzez przeglądanie

■ Dodanie rezystora R1:

- po odczytaniu z pliku wejściowego informacji o rezystorze **R1** program, korzystając z szablonu rezystora, rozszerza macierz o nowy wiersz i kolumnę (nowy węzeł nr 2) i dodaje z właściwym znakiem wartość jego konduktancji do odpowiednich elementów macierzy:

```
Izr 0 1 1m
R1 1 2 5k
R2 2 0 10k
R3 2 3 8k
R4 3 0 2k
.END
```

$$\begin{matrix} & 0 & 1 & 2 \\ 0 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ 1 & \begin{bmatrix} 0 & +0.2m & -0.2m \end{bmatrix} \\ 2 & \begin{bmatrix} 0 & -0.2m & +0.2m \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot \begin{bmatrix} V_0 \\ V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1m \\ +1m \\ 0 \end{bmatrix} \quad (36)$$

- jeśli w strukturze obwodu pojawi się deklaracja rezystora o rezystancji **R**: **R_nazwa n+ n- R** to liczbę **1/R** dodaje się do elementu macierzy konduktancyjnej o współrzędnych **G(n⁺,n⁺)** oraz **G(n⁻,n⁻)**, a liczbę **-1/R** do elementu **G(n⁺,n⁻)** oraz **G(n⁻,n⁺)**
- nie można stosować rezystorów o zerowej rezystancji, gdyż wtedy konduktancja jest nieskończona

Konstrukcja macierzy poprzez przeglądanie

■ Dodanie rezystora R2:

- poprzednia postać macierzy:

$$\begin{matrix} & 0 & 1 & 2 \\ 0 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ 1 & \begin{bmatrix} 0 & +0.2m & -0.2m \end{bmatrix} \\ 2 & \begin{bmatrix} 0 & -0.2m & +0.2m \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot \begin{bmatrix} V_0 \\ V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1m \\ +1m \\ 0 \end{bmatrix} \quad (36)$$

```
Izr 0 1 1m
R1 1 2 5k
R2 2 0 10k
R3 2 3 8k
R4 3 0 2k
.END
```

- nowa postać macierzy:

$$\begin{matrix} & 0 & 1 & 2 \\ 0 & \begin{bmatrix} +0.1m & 0 & -0.1m \end{bmatrix} \\ 1 & \begin{bmatrix} 0 & +0.2m & -0.2m \end{bmatrix} \\ 2 & \begin{bmatrix} -0.1m & -0.2m & +0.3m \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot \begin{bmatrix} V_0 \\ V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1m \\ +1m \\ 0 \end{bmatrix} \quad (37)$$

Konstrukcja macierzy poprzez przeglądanie

■ Dodanie rezystora R3:

- poprzednia postać macierzy:

$$\begin{matrix} & 0 & 1 & 2 \\ 0 & \begin{bmatrix} +0.1m & 0 & -0.1m \end{bmatrix} \\ 1 & \begin{bmatrix} 0 & +0.2m & -0.2m \end{bmatrix} \\ 2 & \begin{bmatrix} -0.1m & -0.2m & +0.3m \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot \begin{bmatrix} V_0 \\ V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1m \\ +1m \\ 0 \end{bmatrix} \quad (37)$$

```
Izr 0 1 1m
R1 1 2 5k
R2 2 0 10k
R3 2 3 8k
R4 3 0 2k
.END
```

- nowa postać macierzy:

$$\begin{matrix} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & \begin{bmatrix} +0.1m & 0 & -0.1m & 0 \end{bmatrix} \\ 1 & \begin{bmatrix} 0 & +0.2m & -0.2m & 0 \end{bmatrix} \\ 2 & \begin{bmatrix} -0.1m & -0.2m & +0.425m & -0.125m \end{bmatrix} \\ 3 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.125m & +0.125m \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot \begin{bmatrix} V_0 \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1m \\ +1m \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (38)$$

Konstrukcja macierzy poprzez przeglądanie

■ Dodanie rezystora R4:

- poprzednia postać macierzy:

$$\begin{matrix} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & \begin{bmatrix} +0.1m & 0 & -0.1m & 0 \end{bmatrix} \\ 1 & \begin{bmatrix} 0 & +0.2m & -0.2m & 0 \end{bmatrix} \\ 2 & \begin{bmatrix} -0.1m & -0.2m & +0.425m & -0.125m \end{bmatrix} \\ 3 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.125m & +0.125m \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot \begin{bmatrix} V_0 \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1m \\ +1m \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (38)$$

```
Izr 0 1 1m
R1 1 2 5k
R2 2 0 10k
R3 2 3 8k
R4 3 0 2k
.END
```

- nowa postać macierzy:

$$\begin{matrix} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & \begin{bmatrix} +0.6m & 0 & -0.1m & -0.5m \end{bmatrix} \\ 1 & \begin{bmatrix} 0 & +0.2m & -0.2m & 0 \end{bmatrix} \\ 2 & \begin{bmatrix} -0.1m & -0.2m & +0.425m & -0.125m \end{bmatrix} \\ 3 & \begin{bmatrix} -0.5m & 0 & -0.125m & +0.625m \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot \begin{bmatrix} V_0 \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1m \\ +1m \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (39)$$

Konstrukcja macierzy poprzez przeglądanie

- ponieważ węzeł masy o numerze 0 jest punktem odniesienia dla pozostałych węzłów niezależnych, to jego potencjał jest z definicji równy 0
- należy zatem wyeliminować kolumnę o numerze 0 oraz wiersz nr 0:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} 0 \\ \hline 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 +0.6m & 0 & -0.1m & -0.5m \\
 0 & +0.2m & -0.2m & 0 \\
 -0.1m & -0.2m & +0.425m & -0.125m \\
 -0.5m & 0 & -0.125m & +0.625m
 \end{bmatrix}
 \cdot
 \begin{bmatrix}
 V_0 \\
 V_1 \\
 V_2 \\
 V_3
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 -1m \\
 +1m \\
 0 \\
 0
 \end{bmatrix}
 \end{array}
 \quad (39)$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 +0.2m & -0.2m & 0 \\
 -0.2m & +0.425m & -0.125m \\
 0 & -0.125m & +0.625m
 \end{bmatrix}
 \cdot
 \begin{bmatrix}
 V_1 \\
 V_2 \\
 V_3
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 +1m \\
 0 \\
 0
 \end{bmatrix}
 \end{array}
 \quad (40)$$

- w rzeczywistości program już na etapie wczytywania elementów nie tworzy kolumny i wiersza odpowiadających węzłowi 0