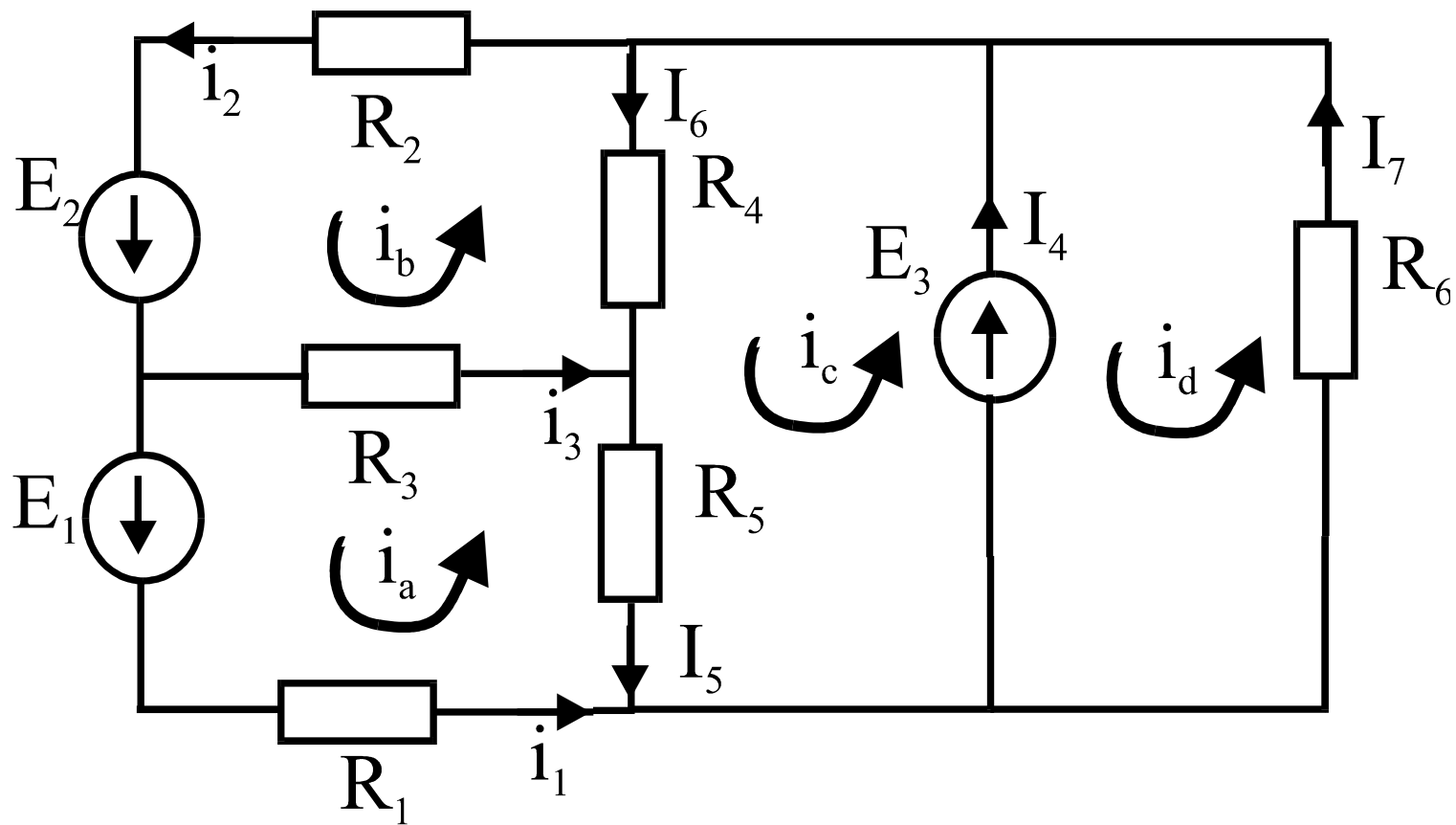


Metoda prądów obwodowych

- Zamieniamy wszystkie rzeczywiste źródła prądowe na napięciowe,
- Tworzymy układ równań liniowych opisujących poszczególne obwody.



Dowolną sieć liniową składającą się z elementów skupionych można opisać za pomocą układu i równań liniowych

$$i = g - w + 1$$

gdzie: g – liczba gałęzi sieci, w – liczba niezależnych węzłów.

$$\left. \begin{array}{l} a) \quad E_1 = i_1 R_1 - i_5 R_5 - i_3 R_3 \\ b) \quad E_2 = i_3 R_3 - i_6 R_4 + i_2 R_2 \\ c) \quad E_3 = i_5 R_5 + i_6 R_4 \\ d) \quad E_3 = -i_7 R_6 \end{array} \right\}$$

Prądy gałęziowe można zastąpić prądami obwodowymi: i_a , i_b , i_c oraz i_d

$$\left. \begin{aligned} a) \quad E_1 &= i_a R_1 - (i_c - i_a) R_5 - (i_b - i_a) R_3 \\ b) \quad E_2 &= (i_b - i_a) R_3 - (i_c - i_b) R_4 + i_b R_2 \\ c) \quad E_3 &= (i_c - i_a) R_5 + (i_c - i_b) R_4 \\ d) \quad E_3 &= -i_d R_6 \end{aligned} \right\}$$

$$i_d = i_7 = \frac{-E_3}{R_6}$$

Pozostaje do rozwiązania układ trzech równań, który można przekształcić do postaci

$$\left. \begin{aligned} a) \quad E_1 &= (R_1 + R_3 + R_5)i_a & - R_3i_b & & - R_5i_c \\ b) \quad E_2 &= -R_3i_a & + (R_2 + R_3 + R_4)i_b & & - R_4i_c \\ c) \quad E_3 &= -R_5i_a & - R_4i_b & & + (R_4 + R_5)i_c \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} E_a &= R_{aa}i_a & - R_{ab}i_b & & - R_{ac}i_c \\ E_b &= -R_{ba}i_a & + R_{bb}i_b & & - R_{bc}i_c \\ E_c &= -R_{ca}i_a & - R_{cb}i_b & & + R_{cc}i_c \end{aligned} \right\} \text{ i - równań}$$

Zależność tę można zapisać w postaci równania macierzowego

$$[E_c]_{i,1} = [R_c]_{i,i} [i_c]_{i,1}$$

gdzie: $[E_c]$ – wektor obwodowych sił elektromotorycznych,

$[R_c]$ – macierz rezystancji obwodowych,

$[i_c]$ – wektor prądów obwodowych.

Metoda Cramera:

Liczymy wyznacznik główny W_{cc} macierzy rezystancji obwodowych, z zależności

$$W_{cc} = \begin{vmatrix} R_{aa} & -R_{ab} & -R_{ac} \\ -R_{ba} & R_{bb} & -R_{bc} \\ -R_{ca} & -R_{cb} & R_{cc} \end{vmatrix}$$

- Liczymy wyznaczniki pomocnicze:

$$W_a = \begin{vmatrix} E_a & -R_{ab} & -R_{ac} \\ E_b & R_{bb} & -R_{bc} \\ E_c & -R_{cb} & R_{cc} \end{vmatrix} \qquad W_b = \begin{vmatrix} R_{aa} & E_a & -R_{ac} \\ -R_{ba} & E_b & -R_{bc} \\ -R_{ca} & E_c & R_{cc} \end{vmatrix}$$

$$W_c = \begin{vmatrix} R_{aa} & -R_{ab} & E_a \\ -R_{ba} & R_{bb} & E_b \\ -R_{ca} & -R_{cb} & E_c \end{vmatrix}$$

- Liczymy prądy obwodowe z zależności:

$$i_a = \frac{W_a}{W_{cc}}, \quad i_b = \frac{W_b}{W_{cc}}, \quad i_c = \frac{W_c}{W_{cc}}$$

- Liczymy prądy gałęziowe z zależności:

$$i_1 = i_a,$$

$$i_2 = i_b,$$

$$i_3 = i_b - i_a,$$

$$i_4 = i_c - i_d,$$

$$i_5 = i_c - i_a,$$

$$i_6 = i_c - i_b,$$

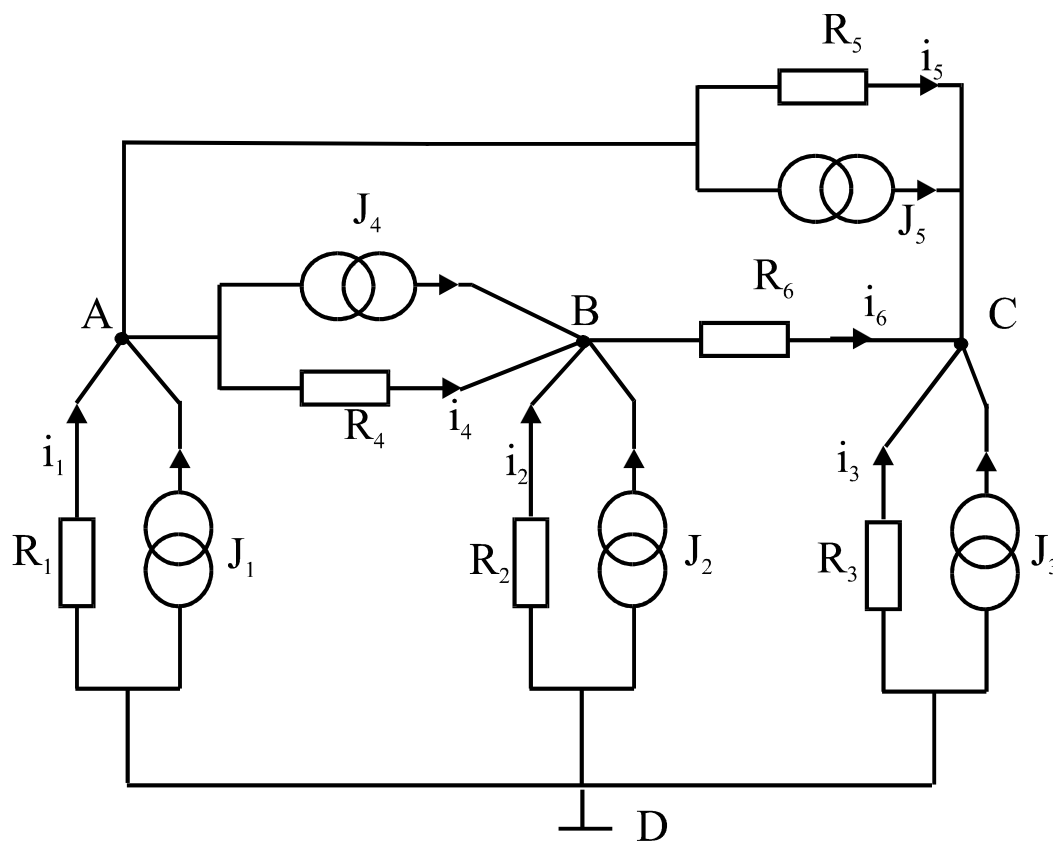
$$i_7 = i_d.$$

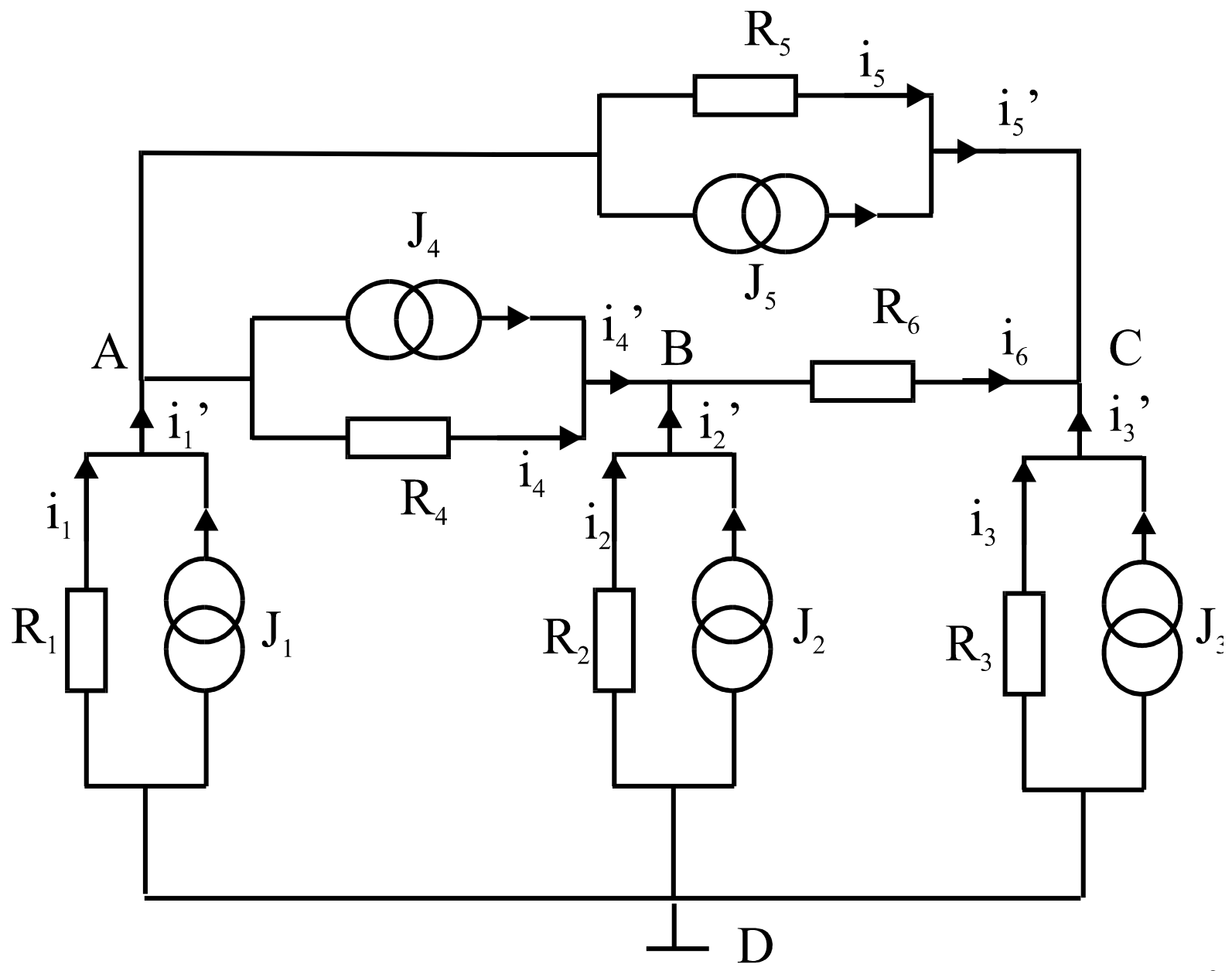
Metoda potencjałów węzłowych

W metodzie tej:

- zamieniamy wszystkie rzeczywiste źródła napięciowe na źródła prądowe,
- wybieramy węzeł odniesienia,

zapisujemy $w = w' - 1$ liniowych równań węzłowych dla pozostałych węzłów.





Prądy gałęziowe dla pierwszego węzła A można wyrazić w postaci:

$$i_1' = J_1 - \frac{V_A}{R_1} \quad i_4' = J_4 - \frac{V_B - V_A}{R_4} \quad i_5' = J_5 - \frac{V_C - V_A}{R_5}$$

$$i_1' - i_4' - i_5' = 0$$

$$J_1 - \frac{V_A}{R_1} - J_4 + \frac{V_B - V_A}{R_4} - J_5 + \frac{V_C - V_A}{R_5} = 0$$

$$J_1 - J_4 - J_5 = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} \right) V_A - \frac{1}{R_4} V_B - \frac{1}{R_5} V_C$$

Pełny opis obwodu przyjmie zatem postać

$$A) \quad J_1 - J_4 - J_5 = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} \right) V_A - \frac{1}{R_4} V_B - \frac{1}{R_5} V_C$$

$$B) \quad J_4 + J_2 = -\frac{1}{R_4} V_A + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_6} \right) V_B - \frac{1}{R_6} V_C$$

$$C) \quad J_3 + J_5 = -\frac{1}{R_5} V_A - \frac{1}{R_6} V_B + \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6} \right) V_C$$

Powyższy układ równań można zapisać w postaci ogólnej

$$\left. \begin{aligned} J_A &= G_{AA}V_A - G_{AB}V_B - G_{AC}V_C \\ J_B &= -G_{BA}V_A + G_{BB}V_B - G_{BC}V_C \\ J_C &= -G_{CA}V_A - G_{CB}V_B + G_{CC}V_C \end{aligned} \right\} \text{w - równań}$$

$$[J_p]_{w,1} = [G_p]_{w,w} [V_p]_{w,1}$$

W kolejnym etapie obliczamy potencjały węzłowe stosując metodę Cramera:

- Liczymy wyznacznik główny

$$W_{pp} = \begin{vmatrix} G_{AA} & -G_{AB} & -G_{AC} \\ -G_{BA} & G_{BB} & -G_{BC} \\ -G_{CA} & -G_{CB} & G_{CC} \end{vmatrix}$$

- Liczymy wyznaczniki pomocnicze

$$W_A = \begin{vmatrix} J_A & -G_{AB} & -G_{AC} \\ J_B & G_{BB} & -G_{BC} \\ J_C & -G_{CB} & G_{CC} \end{vmatrix} \qquad W_B = \begin{vmatrix} G_{AA} & J_A & -G_{AC} \\ -G_{BA} & J_B & -G_{BC} \\ -G_{CA} & J_C & G_{CC} \end{vmatrix}$$

$$W_C = \begin{vmatrix} G_{AA} & -G_{AB} & J_C \\ -G_{BA} & G_{BB} & J_B \\ -G_{CA} & -G_{CB} & J_C \end{vmatrix}$$

- Obliczamy potencjały węzłowe

$$V_A = \frac{W_A}{W_{pp}}, \quad V_B = \frac{W_B}{W_{pp}}, \quad V_C = \frac{W_C}{W_{pp}}$$

- Obliczamy prądy gałęziowe

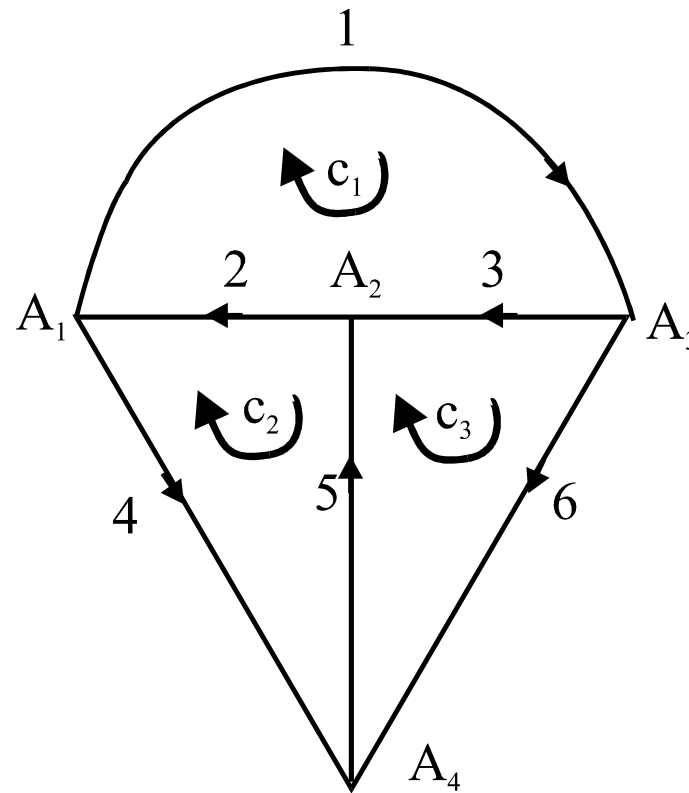
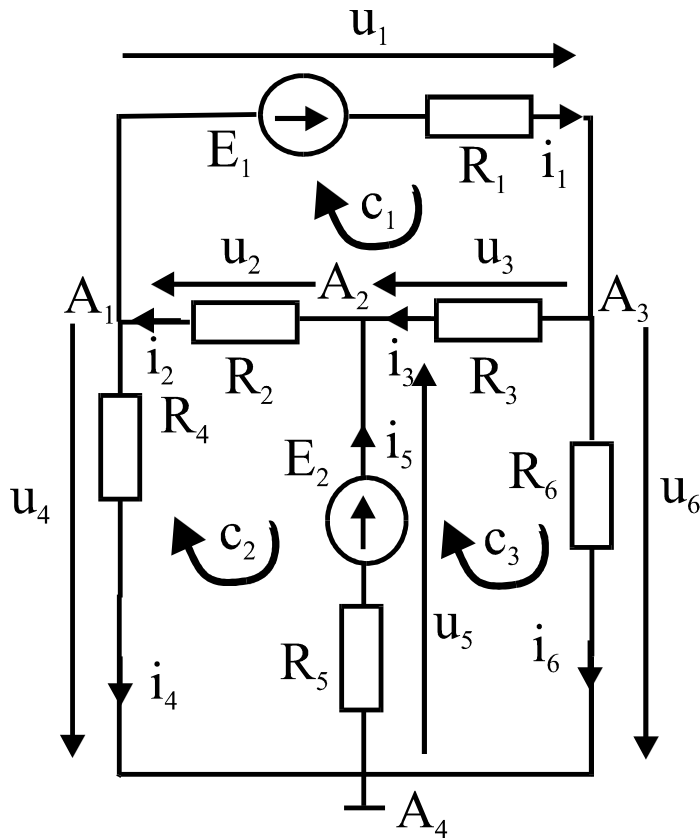
$$i_1 = \frac{-V_A}{R_1}, \quad i_2 = \frac{-V_B}{R_2}, \quad i_3 = \frac{-V_C}{R_3}, \quad i_4 = \frac{V_A - V_B}{R_4},$$

$$i_5 = \frac{V_A - V_C}{R_5}, \quad i_6 = \frac{V_B - V_C}{R_6}.$$

Zastosowanie grafów w rozwiązywaniu obwodów

Odwzorowanie w wyniku którego poprzez incydencję I , każdej krawędzi x_i odpowiada para wierzchołków (y_j, y_k) nazywamy grafem. Grafem skierowanym jest graf, w którym wierzchołki określają początek i koniec krawędzi.

$$G = \langle X, Y, I \rangle$$



- **Określenie macierzy strukturalnej $[\delta]$**

$$\left. \begin{array}{l} c_1) \quad 1u_1 + 1u_2 + 1u_3 + 0u_4 + 0u_5 + 0u_6 = 0 \\ c_2) \quad 0u_1 - 1u_2 + 0u_3 - 1u_4 - 1u_5 + 0u_6 = 0 \\ c_3) \quad 0u_1 + 0u_2 - 1u_3 + 0u_4 + 1u_5 + 1u_6 = 0 \end{array} \right\}$$

z tego układu równań otrzymujemy drugie prawo Kirchhoffa w postaci uogólnionej

$$[\delta]_{i,k} [u_g]_{k,1} = [0]_{i,k}$$

gdzie : $[u_g]$ – wektor napięć gałęziowych,

$[\delta]$ – macierz gałęziowo obwodowa (obwodowa).

Macierz $[\delta]$ dla rozpatrywanego obwodu ma postać

$$[\delta] = \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \left. \begin{array}{l} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{array} \right\}$$

Wszystkie prądy gałęziowe można wyrazić za pomocą sumy algebraicznej wszystkich prądów obwodowych

$$i_1 = 1i_{c_1} + 0i_{c_2} + 0i_{c_3}$$

$$i_2 = 1i_{c_1} - 1i_{c_2} + 0i_{c_3}$$

$$i_3 = 1i_{c_1} + 0i_{c_2} - 1i_{c_3}$$

$$i_4 = 0i_{c_1} - 1i_{c_2} + 0i_{c_3}$$

$$i_5 = 0i_{c_1} - 1i_{c_2} + 1i_{c_3}$$

$$i_6 = 0i_{c_1} + 0i_{c_2} + 1i_{c_3}$$

- Obliczenie wektora prądów gałęziowych $[i_g]$

$$[i_g]_{k,1} = [\delta]_{k,i}^T [i_c]_{i,1}$$

$$[i_c]_{i,1} = [R_c]_{i,i}^{-1} [E_c]_{i,1}$$

$$[i_g]_{k,1} = [\delta]_{k,i}^T [R_c]_{i,i}^{-1} [E_c]_{i,1}$$

Powyższa zależność przedstawia związek pomiędzy pobudzeniem w postaci wektora obwodowych sił elektromotorycznych a odpowiedzią w postaci wektora prądów gałęziowych.

- **Określenie macierzy strukturalnej $[\lambda]$**

$$\left. \begin{array}{l} A_1) \quad -1i_1 \quad +1i_2 \quad +0i_3 \quad -1i_4 \quad +0i_5 \quad +0i_6 = 0 \\ A_2) \quad +0i_1 \quad -1i_2 \quad +1i_3 \quad +0i_4 \quad +1i_5 \quad +0i_6 = 0 \\ A_3) \quad +1i_1 \quad +0i_2 \quad -1i_3 \quad +0i_4 \quad +0i_5 \quad -1i_6 = 0 \end{array} \right\}$$

$$[\lambda]_{w,k} [i_g]_{k,1} = [0]_{w,1}$$

Macierz $[\lambda]$ nazywa się macierzą gałęziowo – węzłową lub macierzą incydencji.

Wszystkie napięcia gałęziowe można wyrazić za pomocą algebraicznej sumy potencjałów węzłowych.

$$\left. \begin{array}{lclcl} u_1 = & -1V_1 & +0V_2 & +1V_3 \\ u_2 = & +1V_1 & -1V_2 & +0V_3 \\ u_3 = & +0V_1 & +1V_2 & -1V_3 \\ u_4 = & -1V_1 & +0V_2 & +0V_3 \\ u_5 = & +0V_1 & +1V_2 & +0V_3 \\ u_6 = & +0V_1 & +0V_2 & -1V_3 \end{array} \right\}$$

$$\left[u_g \right]_{k,1} = \left[\lambda \right]_{k,w}^T \left[V_p \right]_{w,1}$$

$$\left[V_p \right]_{w,1} = \left[G_p \right]_{w,w}^{-1} \left[J_p \right]_{w,1}$$

- Obliczenie wektora napięć gałęziowych $[u_g]$

$$[u_g]_{k,1} = [\lambda]_{k,w}^T [G_p]_{w,w}^{-1} [J_p]_{w,1}$$

Powyższa zależność przedstawia związek pomiędzy pobudzeniem przedstawionym w postaci wektora źródłowych prądów węzłowych a odpowiedzią przedstawioną w postaci wektora napięć gałęziowych.

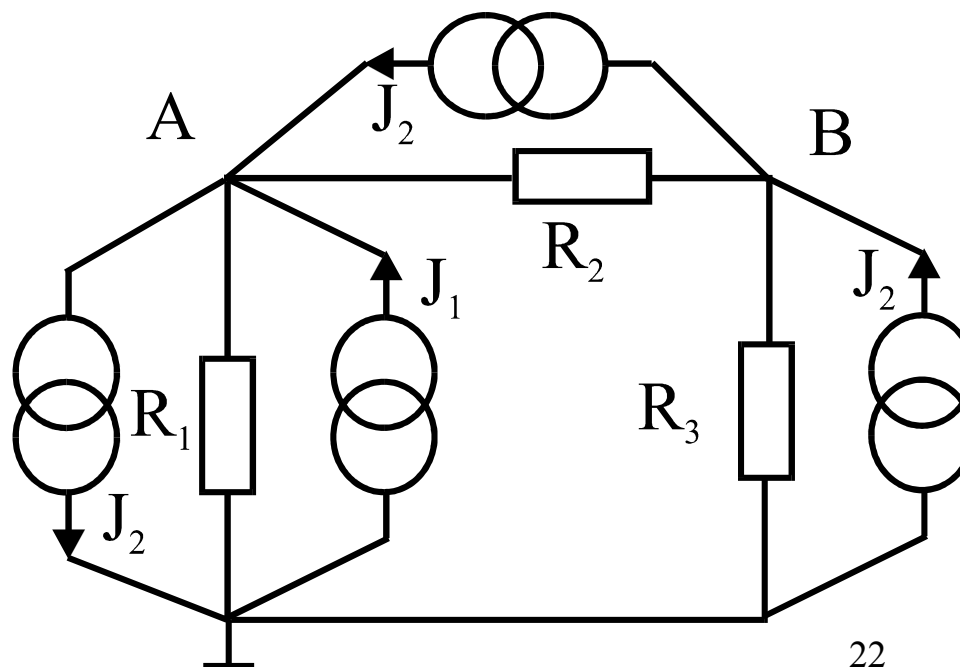
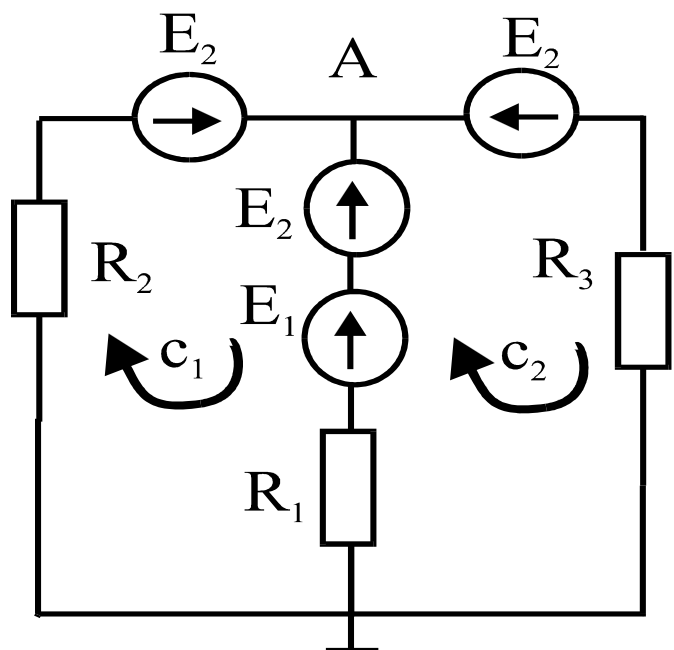
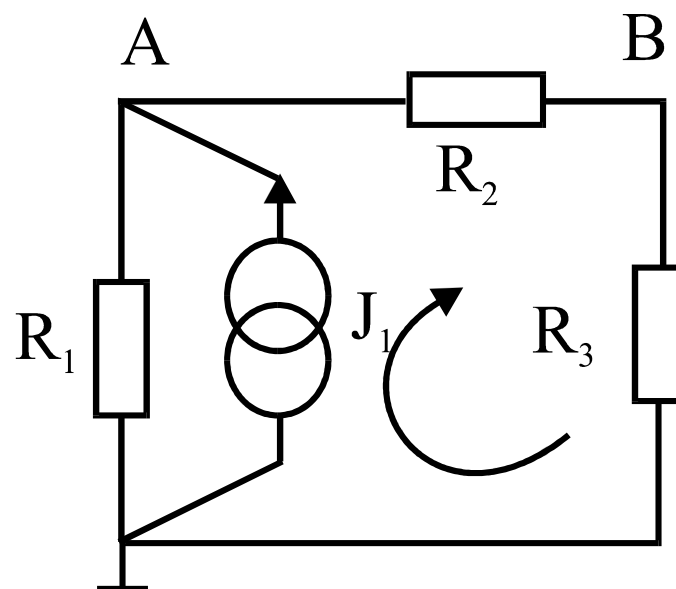
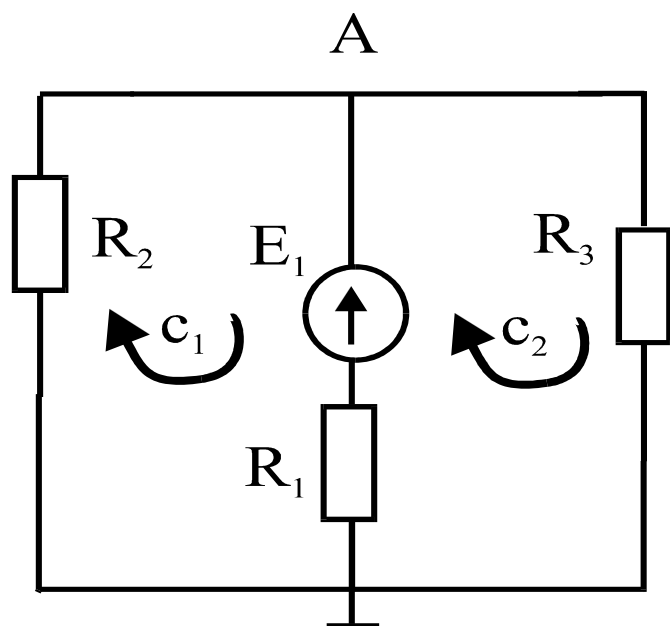
Twierdzenia o włączaniu źródeł idealnych

- źródła napięciowe

W obwodzie rozgałęzionym rozptyw prądów nie ulegnie zmianie, jeżeli do wszystkich gałęzi należących do tego samego węzła włączymy po jednym idealnym źródle napięciowym o tej samej wartości siły elektromotorycznej i o tym samym zwrocie w stosunku do węzła.

- źródła prądowe

W obwodzie rozgałęzionym rozptyw prądów nie ulegnie zmianie, jeżeli równolegle do wszystkich gałęzi należących do tego samego obwodu włączymy po jednym idealnym źródle prądowym o tej samej wartości prądu zwarciovego i o tym samym zwrocie w stosunku do obwodu.



$$a) \quad \left. \begin{aligned} (R_1 + R_2)i_{c_1} - R_1i_{c_2} &= E_2 - E_2 - E_1 = -E_1 \\ -R_1i_{c_1} + (R_1 + R_3)i_{c_2} &= E_1 + E_2 - E_2 = E_1 \end{aligned} \right\}$$

$$b) \quad \left. \begin{aligned} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) V_A - \frac{1}{R_2} V_B &= J_1 + J_2 - J_2 = J_1 \\ -\frac{1}{R_2} V_A + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) V_B &= J_2 - J_2 = 0 \end{aligned} \right\}$$

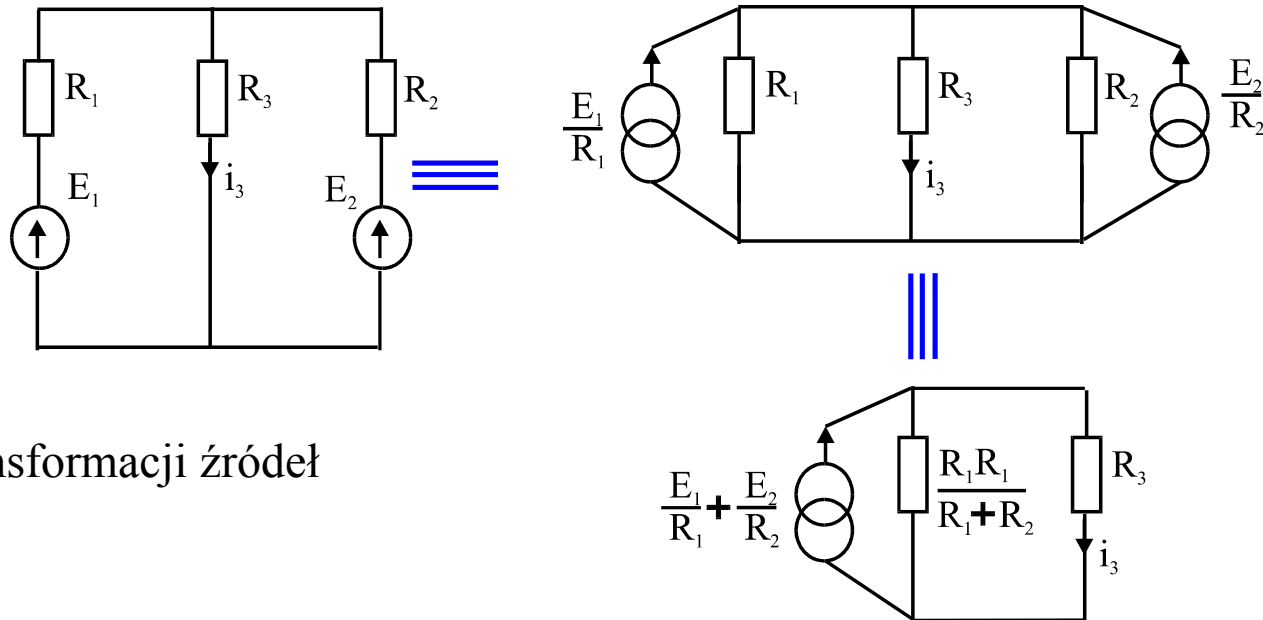
Wektor odpowiedzi (prądów gałęziowych) nie zmieni się tak długo jak długo wektor pobudzeń (obwodowych sił elektromotorycznych) będzie stały.

Wektor odpowiedzi (napięć gałęziowych) nie zmieni się tak długo jak długo wektor pobudzeń (węzłowych prądów źródłowych) nie ulegnie zmianie.

Zasada superpozycji

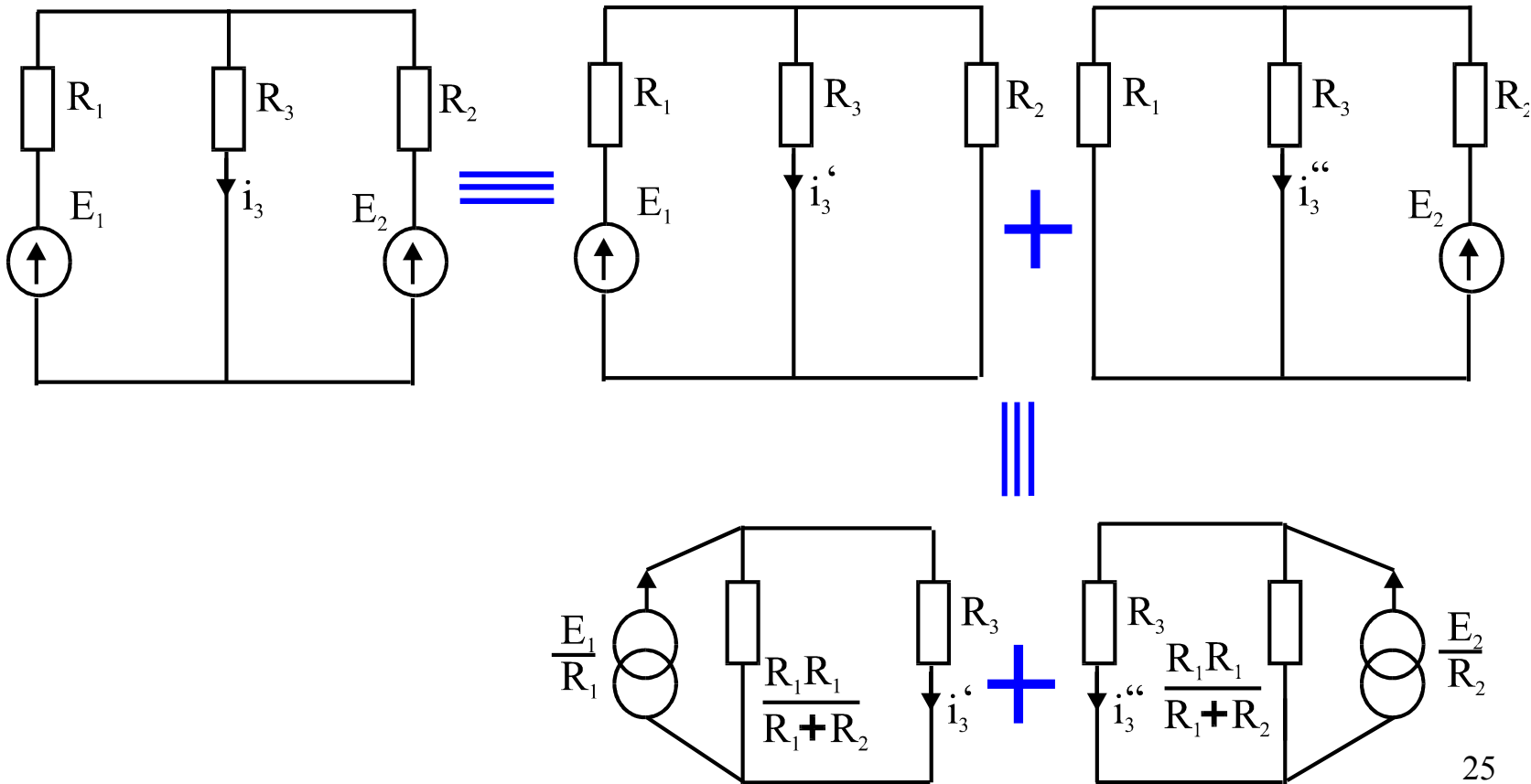
Prąd w dowolnej gałęzi sieci liniowej stanowi sumę prądów od każdego źródła z osobna, przy wyłączonych źródłach pozostałych

- Wyłączenie źródła napięciowego oznacza zastąpienie zwarciem siły elektromotorycznej,
- Wyłączenie źródła prądowego oznacza usunięcie gałęzi zawierającej źródło (rozwarcie).



Metoda transformacji źródeł

$$i_3 = \left(\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} \right) \frac{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3}$$



$$\left. \begin{aligned} i_3' &= \frac{E_1}{R_1} \frac{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3} = E_1 \frac{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}{R_1 \left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3 \right)} \\ i_3'' &= \frac{E_2}{R_2} \frac{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3} = E_2 \frac{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}{R_2 \left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3 \right)} \end{aligned} \right\}$$

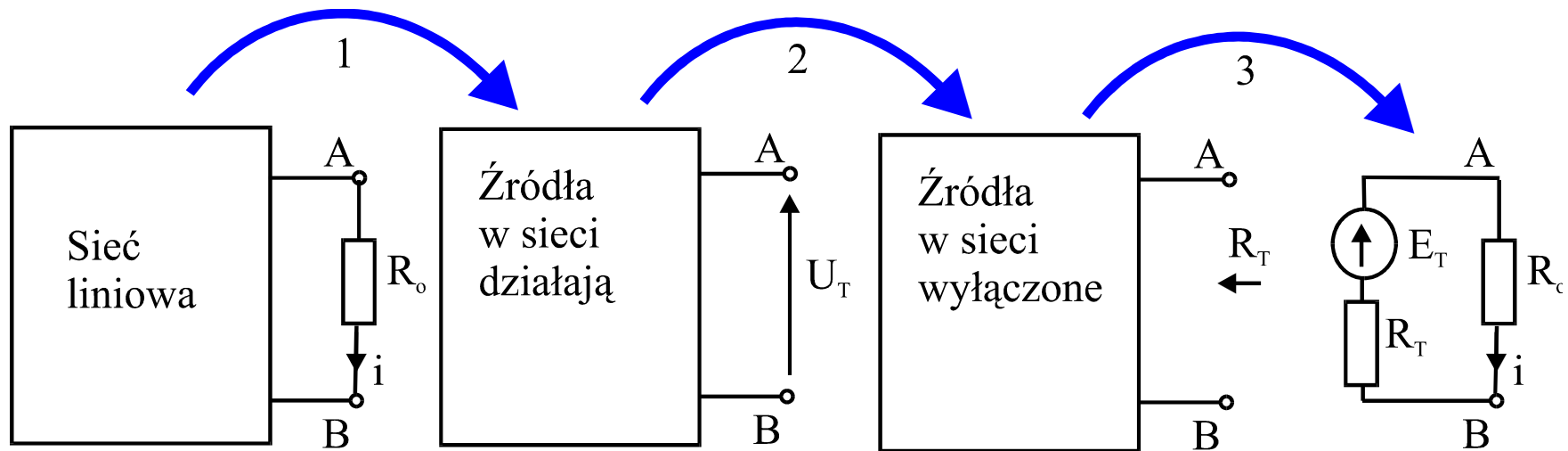
$$\left[i_g \right]_{k,1} = [\chi]_{k,i} \left[E_c \right]_{i,1}$$

$$\left[u_g \right]_{k,1} = [\gamma]_{k,w} \left[J_p \right]_{w,1}$$

$$\left. \begin{aligned} i_1 &= \chi_{1,1} E_1 + \chi_{1,2} E_2 \\ i_2 &= \chi_{2,1} E_1 + \chi_{2,2} E_2 \\ i_3 &= \chi_{3,1} E_1 + \chi_{3,2} E_2 \end{aligned} \right\}$$

Twierdzenie Thevenina

Każdą sieć liniową można zastąpić z punktu widzenia pary dowolnych wyprowadzeń rzeczywistym źródłem napięciowym o sile elektromotorycznej E_T , równej napięciu na wyprowadzeniach w stanie rozwarcia oraz oporze wewnętrznym R_T , równym oporowi pomiędzy wyprowadzeniami przy wyłączonych źródłach.



- Obliczamy napięcie Thevenina na rozwartych wyprowadzeniach obwodu,
 - Obliczamy rezystancję Thevenina widzianą od strony wyróżnionych wyprowadzeń przy wyłączonych źródłach,
 - Obliczamy prąd płynący przez obciążenie, korzystając z zastępczego źródła Thevenina.
- Zgodnie z algorytmem postępowania prąd i płynący przez obciążenie przyjmie postać

$$i = \frac{E_T}{R_T + R_o}$$