Informatyka ISI. Lista 5. Przekształcenia liniowe

1. Sprawdzić, które z danych przekształceń są liniowe:

   (a) $L:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2;\ \ [x,y]\mapsto[y,x+y]$,
   (b) $L:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2;\ \ [x,y]\mapsto[x,|y|]$,
   (c) $L:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2;\ \ [x,y]\mapsto[x+y,xy]$,
   (d) symetria względem prostej $y=-x$ w $\mathbb{R}^2$,
   (e) $L:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3;\ \ t\mapsto[t,-t,2t]$,
   (f) $L:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3;\ \ t\mapsto[t,-t,t^2]$,
   (g) $L:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3;\ \ [x,y]\mapsto[x+y,1,y-x]$,
   (h) $L:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3;\ \ [x,y]\mapsto[x+y,2x-y,y-2x]$,
   (i) $L:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2;\ \ [x,y,z]\mapsto[x-3y-2z,-x+6y+4z]$,
   (j) $L:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3;\ \ [x,y,z]\mapsto[x+y+z,x+2y+3z,3x+2y+z]$.

2. Wypisać macierze przekształceń liniowych z zad.1 (w bazach kanonicznych).

3. Wyznaczyć jądra i obrazy przekształceń liniowych z zad.1.

4. Wyznaczyć jądra i obrazy przekształceń liniowych o danych macierzach w bazach kanonicznych:

a) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & -3 & 7 & 1 \end{bmatrix}$, c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$.

5. Dowolna permutacja wektorów bazy kanonicznej przestrzeni $\mathbb{R}^n$ determinuje automorfizm liniowy tej przestrzeni. Wyznaczyć macierze takich automorfizmów dla permutacji $\sigma=(1,3,4)$ i $\tau=(1,4,3,2)$ wektorów bazowych przestrzeni $\mathbb{R}^4$.

6. Wyznaczyć wartości własne, wektory własne i podprzestrzenie niezmiennicze podanych endomorfizmów. Tam, gdzie jest baza wektorów własnych podać macierz endomorfizmu w tej bazie.

a) $L:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2;\ \ [x,y]\mapsto[-3x+2y,-12x+7y]$; b) $L:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2;\ \ [x,y]\mapsto[2x+4y,y-x]$;

c) $L:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2;\ \ [x,y]\mapsto[2x+4y,2x]$; d) $L:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3;\ \ [x,y,z]\mapsto[x,x+2y,2x+y-z]$.

7. Wyznaczyć wartości i wektory własne podanych macierzy:

a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; d) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; e) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

8. Wyznaczyć macierze przejścia z baz kanonicznych do danych baz oraz określić współrzędne danych wektorów $\vec{v}$ w tych bazach:

a) $B=\{[9,-5],[2,-1]\}$, $\vec{v}=[7,8]$; b) $B=\{[1,1],[1,-1]\}$, $\vec{v}=[2\sqrt{2},1]$;

c) $B=\{[1,0,0],[-1,1,0],[3,2,1]\}$, $\vec{v}=[2,3,-1]$.

9. Wyznaczyć macierze przekształceń w zadanych bazach mając dane ich macierze w bazach kanonicznych:

a) $B=\{[7,-4],[2,-1]\}$, $A=\begin{bmatrix} 9 & 14 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}$; b) $B=\{[1,0,0],[2,1,0],[3,5,1]\}$, $A=\begin{bmatrix} 2 & -3 & 12 \\ 1 & -2 & 12 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

c) $B=\{[2,1],[3,1]\}$, $A=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$; d) $B=\{[0,0,1],[1,0,0],[0,1,0]\}$, $A=\begin{bmatrix} 2 & 7 & 6 \\ 9 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 8 \end{bmatrix}$.

10. W zadaniach 6 a) i 6 d) sprawdzić wzór $A'=S^{-1}AS$, gdzie S jest macierzą przejścia z bazy kanonicznej do bazy wektorów własnych, a A' macierzą przekształcenia w tej bazie.