Informatyka ISI. Lista 4. Permutacje

1. Dane są permutacje $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ i $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 6 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Wyznaczyć:

   a) $\sigma\tau$; b) $\tau\sigma$; c) σ^{-1}; d) $\tau^{-1}\sigma^{-1}$; e) τ^2; f) σ^3; g) σ^{22}; h) τ^4.

2. Dane permutacje przedstawić w postaci iloczynów cykli rozłącznych.
   a) σ, τ z zad. 1; b) $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 7 & 4 & 5 & 8 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; c) $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 5 & 9 & 8 & 6 & 4 & 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$;
   d) wyznaczyć α^8 i β^{21}.

3. Permutacje z S_7 dane w postaci iloczynów cykli zapisać w postaci macierzy:
   a) $(1,3,6)(2,4,7)$, b) $(1,5,3,6)(2,4)$; c) $(1,7,5)(2,7,3,6,4)$.

4. Określić ilości inwersji w danych permutacjach i znaki tych permutacji:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 6 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 6 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}(3,4)$; c) $(1,2,3,4)$; d) $(1,4,2,3)$.

5. Dane permutacje zapisać w postaci iloczynów cykli rozłącznych i określić ich znaki:
   a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 & 7 & 9 & 8 & 6 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 2 & 3 & 8 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 5 & 2 & 8 & 1 & 3 & 7 & 4 \end{pmatrix}$;
   c) $(1,2,7)(2,5,6,7,4,3)$; d) $(1,2)(2,3)(3,4)(4,5)$; e) $(1,2)(2,3)(3,4)(4,5)(3,4)(2,3)(1,2)$;
   f) $(1,5,3,8)(1,3,7,8,2)(5,4,6,7)$.

6. Transpozycję $(4,7)$ zapisać jako złożenie transpozycji cyfr sąsiednich.

7. Cykl $(1,6,4,3,5,2)$ zapisać w postaci złożeń transpozycji.

8. Dla wyznacznika macierzy $A = [a_{i,j}]$ stopnia 7 określić znaki jakie stoją przy podanych jego składnikach:

a) $a_{16}a_{23}a_{32}a_{44}a_{57}a_{65}a_{71}$; b) $a_{13}a_{25}a_{36}a_{41}a_{54}a_{62}a_{77}$; c) $a_{17}a_{22}a_{34}a_{43}a_{51}a_{65}a_{76}$.

9. Rozwiązać równania (wyznaczyć permutację ξ):

   (a) $\xi\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

   (b) $(2,4,5)(1,4,2)\xi = (1,4,3,5,2)$;

   (c) $(1,2,3)\xi(3,6,4) = (2,5)$;

10. Wypisać, w postaci rozkładów na cykle rozłączne, wszystkie permutacje nieparzyste grupy S_4 (czyli zbioru $S_4 \setminus A_4$). Czy $S_4 \setminus A_4$ jest podgrupą, grupy S_4?

11. Określić wszystkie typy permutacji (klasy permutacji podobnych) zbioru $S_5 \setminus A_5$ i wyznaczyć liczebności poszczególnych klas.

12. Określić ile jest permutacji sprzężonych z daną permutacją w grupie S_8:
    a) $(1,2)$; b) $(1,2)(3,4)(5,6)(7,8)$; c) $(1,2)(3,4)(5,6,7)$; d) $(1,2,3,4)(5,6,7,8)$.

13. Dla danych permutacji $\alpha, \beta \in S_5$ sprawdzić, czy istnieje taka $\sigma \in S_5$, że $\beta = \sigma\alpha\sigma^{-1}$. Jeśli istnieje, to wyznaczyć.

    (a) $\alpha = (1,2,3,4)$, $\beta = (1,2,5,4)$;

    (b) $\alpha = (1,2,3,4)$, $\beta = (1,2,3)$;

    (c) $\alpha = (1,2,3,4)$, $\beta = (1,4,2,3)$;

    (d) $\alpha = (1,2)(3,4)$, $\beta = (1,4)(3,2)$;

    (e) $\alpha = (1,2,3,4)$, $\beta = (1,2)(3,4)$.