Informatyka ISI. Lista 4. Permutacje

1. Dane są permutacje $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ i $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 5 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Wyznaczyć:

   a) $\sigma\tau$; b) $\tau\sigma$; c) σ^{-1}; d) $\tau^{-1}\sigma^{-1}$; e) σ^2; f) τ^3; g) σ^{16}.

2. Dane permutacje przedstawić w postaci iloczynów cykli rozłącznych.
   a) σ, τ z zad. 1; b) $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 6 & 5 & 8 & 1 & 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}$; c) $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 7 & 2 & 9 & 4 & 1 & 3 & 5 & 8 \end{pmatrix}$;
   d) wyznaczyć α^{12} i β^{13}.

3. Permutacje z S_7 dane w postaci iloczynów cykli zapisać w postaci macierzy:
   a) $(1,3,6,5)(2,4,7)$, b) $(1,5,6)(2,4)$.

4. Określić ilości inwersji w danych permutacjach i znaki tych permutacji:

   a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 6 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; b) $(3,4)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 6 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; c) $(1,4,2,3)$.

5. Dane permutacje zapisać w postaci iloczynów cykli rozłącznych i określić ich znaki:
   a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 2 & 3 & 8 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 5 & 2 & 8 & 1 & 3 & 7 & 4 \end{pmatrix}$; b) $(1,2,7)(2,5,6,7,4,3)(2,4,7)$;
   c) $(1,5,3,8)(1,3,7,8,2)(5,4,6,7)$; d) $(1,4)(4,3)(3,2)(2,5)$; e) $(1,2)(2,3)(3,4)(4,5)(3,4)(2,3)(1,2)$.

6. Transpozycję $(5,7)$ zapisać jako złożenie transpozycji cyfr sąsiednich.

7. Cykl $(1,4,3,6,5,2)$ zapisać w postaci złożeń transpozycji.

8. Dla wyznacznika macierzy $A = [a_{i,j}]$ stopnia 7 określić znaki jakie stoją przy podanych jego składnikach:

   a) $a_{13}a_{27}a_{32}a_{44}a_{56}a_{65}a_{71}$; b) $a_{15}a_{23}a_{31}a_{46}a_{54}a_{62}a_{77}$.

9. Rozwiązać równania (wyznaczyć permutację ξ):

   (a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\xi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$;
   (b) $\xi(2,4,5)(1,4,2) = (1,4,3,5,2)$;
   (c) $(1,2,3,4)\xi(3,6,4) = (3,5)$;

10. Określić wszystkie typy permutacji nieparzystych (klasy permutacji podobnych) z grupy S_5 i wyznaczyć liczebności poszczególnych klas. Czy tworzą one podgrupę grupy S_5?

11. Określić ile jest permutacji sprzężonych z daną permutacją w grupie S_7:
    a) $(1,2,3)$; b) $(1,2)(3,4)(5,6)$; c) $(1,2)(3,4)(5,6,7)$; d) $(1,2,3)(4,5,6,7)$.

12. Dla danych permutacji $\alpha, \beta \in S_5$ sprawdzić, czy istnieje taka $\sigma \in S_5$, że $\beta = \sigma\alpha\sigma^{-1}$. Jeśli istnieje, to wyznaczyć.

    (a) $\alpha = (1,2,3,4)$, $\beta = (1,2,5)$;
    (b) $\alpha = (1,2,3,4)$, $\beta = (1,2,3,5)$;
    (c) $\alpha = (1,2,3)$, $\beta = (2,4,5)$;
    (d) $\alpha = (1,2)(3,4)$, $\beta = (1,4)(3,2)$;
    (e) $\alpha = (1,2,3,4)$, $\beta = (1,2)(3,4)$.