Informatyka ISI. Lista 3. Rząd macierzy, wyznaczniki, układy równań liniowych.

1. Obliczyć rzędy macierzy metodą eliminacji Gaussa:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \\ -5 & -5 & -15 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 5 & 7 & 2 \\ -3 & 9 & 0 \\ 2 & 16 & 2 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 7 & 7 & 7 \\ -1 & 3 & 7 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 8 & 7 \end{bmatrix}$; d) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 7 & 6 & 4 \end{bmatrix}$.

2. Badając rzędy odpowiednich macierzy sprawdzić czy dane wektory są liniowo zależne:

a) $[1,2,3,4], [1,2,1,2], [4,3,2,1], [2,1,2,1]$; b) $[2,3,1,2,3], [1,3,2,1,3], [0,1,1,0,1]$.

3. Obliczyć podane wyznaczniki (w d), e) wyciągnąć stałe przed wyznacznik):

a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -7 & -3 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -14 & 7 & 0 \\ 3 & -8 & 6 \end{vmatrix}$; e) $\begin{vmatrix} 15 & 25 & 10 \\ -1 & 2 & 0 \\ 6 & -12 & 6 \end{vmatrix}$.

4. Obliczyć wyznaczniki stosując rozwinięcie Laplace'a względem wybranego wiersza lub kolumny:

a) $\begin{vmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 13 & 13 & 13 \\ 3 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & 5 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & 9 \\ 2 & -2 & 0 & 5 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -5 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 6 & 4 \end{vmatrix}$.

5. Doprowadzić do prostszej postaci i obliczyć:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 4 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 3 & -2 & -4 & 2 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 2\sqrt{2}+\sqrt{3} & 1 & 2 \\ 4\sqrt{2}+3\sqrt{3} & 2 & 1 \\ 6\sqrt{2}-2\sqrt{3} & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

6. Stosując operacje elementarne na wierszach lub kolumnach uprościć i obliczyć:

a) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ -4 & 2 & 6 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & -3 & -6 \\ 5 & 2 & -5 & 6 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 4 & 0 \end{vmatrix}$.

7. Obliczyć metodą eliminacji Gausa:

a) $\begin{vmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 5 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 7 \\ 4 & 2 & 6 & 1 & 5 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

8. Obliczyć dzieląc macierz na bloki (w c), d) i e) najpierw stosownie przekształcić):

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 4 & 7 & 8 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 8 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 7 & 9 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 2 & 2 \\ 9 & 8 & 7 & 6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 9 & 8 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} 5 & 4 & 1 & 1 \\ 6 & 7 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}$; e) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$.

9. Rozwiązać równania:

a) $\begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$; b) $\begin{vmatrix} 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 1-x \end{vmatrix} = 0$; c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & x & 8 \\ 1 & x & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 9 & x \end{vmatrix} = 0$; d) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix} = 0$.

10. Obliczyć wyznaczniki macierzy we wskazanych ciałach:

a) $\begin{vmatrix} 2+i & 3+2i \\ 3+2i & 1+2i \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 2+i & 1+3i \\ -(1-3i) & 2-i \end{vmatrix}$ w $\mathbb{C}$; b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, w Z_3; c) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, w Z_5.

11. Wyznaczyć macierze odwrotne danych macierzy (w d) e) f) metodą Gaussa):

a) $\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$; d) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$; f) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

12. Rozwiązać równania macierzowe:

a) $X \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot X + \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$;

c) $\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$; d) $X \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix} = X + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix}$.

13. Określić ilość rozwiązań układu równań mając dane: ilość niewiadomych n, rząd macierzy układu rA i rząd macierzy uzupełnionej rU. W przypadku nieskończonych zbiorów rozwiązań określić od ilu parametrów one zależą.

a) $n = 6$, $rA = rU = 4$; b) $n = 5$, $rA = 2$, $rU = 3$; c) $n = 4 = rA = rU$; d) $n = 5$, $rA = rU = 4$.

14. Wykorzystując twierdzenie Kroneckera-Capellego rozwiązać podane układy metodą eliminacji Gausa:

a) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 6 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2x + y + z = 5 \\ x - 2y + 3z = 0 \\ 5x + y + z = 8 \\ 2x + 2y - 3z = 3 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 0 \\ 6x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} 3x + y + z = -1 \\ x + 2z = -6 \\ 3y + 2z = 0 \end{cases}$; e) $\begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ x + 2y + z = 4 \\ 3y + z = 5 \end{cases}$; f) $\begin{cases} x - y + z = -1 \\ 2x + y + 2z = 7 \\ 3x - 6y + 3z = -12 \end{cases}$.

15. Korzystając ze wzoru Cramera znaleźć rozwiązania podanych układów równań:

a) $\begin{cases} 5x - 2y = 4 \\ 3x + y = 7 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + 3y + z = 3 \\ 3x + y + 2z = 2 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y - z = 7 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$.

16. Zbadać ilość rozwiązań układów równani w zależności od parametru p:

a) $\begin{cases} x + py - z = 1 \\ x + 10y - 6z = p \\ 2x - y + pz = 0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x + 4y - 2z = -p \\ 3x + 5y - pz = 3 \\ px + 3py + z = p \end{cases}$.

17. Korzystając z metody eliminacji Gaussa wyznaczyć wymiary danych podprzestrzeni przestrzeni $\mathbb{R}^5$ oraz wskazać ich przykładowe bazy:

a) $\left\{[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5] \in \mathbb{R}^5 : \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}\right\}$;

b) $lin\{[1, -1, 1, -1, 1], [2, 2, 3, 3, 3], [3, 3, 2, 2, 2], [3, -1, 3-1, 3]\}$.