

# Informatyka ISI. Lista 3. Rząd macierzy, wyznaczniki, układy równań liniowych.

1. Obliczyć rzędy macierzy korzystając z definicji lub metody eliminacji Gaussa:

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ -6 & -3 & -9 \end{bmatrix}; \quad \text{b) } \begin{bmatrix} 5 & 6 & 2 \\ -3 & 7 & 0 \\ 2 & 13 & 2 \end{bmatrix}; \quad \text{c) } \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ -1 & 3 & 7 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 8 & 7 \end{bmatrix}; \quad \text{d) } \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 7 & 6 & 4 \end{bmatrix}.$$

2. Badając rzędy odpowiednich macierzy wyznaczyć wymiary danych podprzestrzeni i wskazać ich przykładowe bazy:

$$\text{a) } \text{lin}\{[4, 3, 2, 1], [1, 2, 3, 4], [1, 2, 1, 2], [2, 1, 2, 1]\}; \quad \text{b) } \text{lin}\{[2, 5, 3, 4, 7], [1, 3, 2, 1, 4], [0, 1, 1, 0, 1]\}.$$

3. Obliczyć podane wyznaczniki ( w dwóch ostatnich wyciągnąć stałe przed wyznaczniki):

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -7 & -3 \end{vmatrix}; \quad \text{b) } \begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix}; \quad \text{c) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}; \quad \text{d) } \begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -14 & 7 & 21 \\ 3 & 8 & 6 \end{vmatrix}; \quad \text{e) } \begin{vmatrix} 15 & 25 & 10 \\ -1 & 2 & 0 \\ 8 & -16 & 6 \end{vmatrix}.$$

4. Obliczyć wyznaczniki stosując rozwinięcie Laplace'a względem wybranego wiersza lub kolumny:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 17 & 17 & 17 \\ 3 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 2 & 5 & 2 \end{vmatrix}; \quad \text{c) } \begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & 5 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 7 \\ 2 & -2 & 0 & 2 \end{vmatrix}; \quad \text{d) } \begin{vmatrix} 0 & 2 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -5 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 6 & 4 \end{vmatrix}.$$

5. Korzystając z własności wyznacznika uprościć i obliczyć:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 9 & 3 \\ 5 & 8 & 7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 9 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 8 & 7 \end{vmatrix}; \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 4 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 & -4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 4 & 2 \end{vmatrix}; \quad \text{c) } \begin{vmatrix} \sqrt{2} + 3\sqrt{3} & 1 & 2 \\ 2\sqrt{2} + \sqrt{3} & 2 & 1 \\ 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3} & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

6. Stosując metodę eliminacji Gaussa lub inne operacje elementarne na wierszach lub kolumnach uprościć i obliczyć:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \end{vmatrix}; \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 3 & 6 \\ 5 & 2 & 5 & 6 \end{vmatrix}; \quad \text{c) } \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}; \quad \text{d) } \begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 7 \end{vmatrix}; \quad \text{e) } \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 7 \\ 4 & 2 & 6 & 1 & 5 \end{vmatrix};$$

7. Obliczyć dzieląc macierz na bloki (w c), d) i e) najpierw stosownie przekształcić):

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 4 & 7 & 8 \end{vmatrix}; \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 8 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 7 & 9 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 2 & 3 \\ 9 & 8 & 7 & 6 & 1 & 2 \end{vmatrix}; \quad \text{c) } \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 9 & 8 \end{vmatrix}; \quad \text{d) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 0 & 7 & 8 \\ 7 & 6 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

$$\text{8. Rozwiązać równania: a) } \begin{vmatrix} 2-x & 2 & 2 \\ 2 & 2-x & 2 \\ 2 & 2 & 2-x \end{vmatrix} = 0; \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ x & 2 & 3 & 4 \\ 1 & x & 3 & 4 \\ 2 & 4 & x & 8 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{c) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix} = 0.$$

9. Obliczyć wyznaczniki macierzy we wskazanych ciałach:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 2+i & 3+2i \\ 2+3i & 1+2i \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1+3i & 4+3i \\ -(4-3i) & 1-3i \end{vmatrix} \text{ w } \mathbb{C}; \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}, \text{ w } \mathbb{Z}_3; \quad \text{c) } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \text{ w } \mathbb{Z}_2.$$

10. Wyznaczyć macierze odwrotne danych macierzy (w d e f) metodą Gaussa): a)  $\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ ;

b)  $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ; c)  $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$ ; d)  $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ; e)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ ; f)  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ .

11. Rozwiązać równania macierzowe:

a)  $X \cdot \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 6 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$ ; b)  $\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot X + \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ ;

c)  $\frac{1}{6} \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ ; d)  $X \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} = X + \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ .

12. Określić ilość rozwiązań układu równań mając dane: ilość niewiadomych  $n$ , rząd macierzy układu  $rA$  i rząd macierzy uzupełnionej  $rU$ . W przypadku nieskończonych zbiorów rozwiązań określić od ilu parametrów one zależą.

a)  $n = 5, rA = rU = 4$ ; b)  $n = 4, rA = 2, rU = 3$ ; c)  $n = 6 = rA = rU$ ; d)  $n = 5, rA = rU = 3$ .

13. Wykorzystując twierdzenie Kroneckera-Capellego rozwiązać podane układy metodą eliminacji Gaussa:

a)  $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 6 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$ ; b)  $\begin{cases} 2x + y + z = 5 \\ x - 2y + 3z = 0 \\ 5x + y + z = 8 \\ 2x + 2y - 3z = 3 \end{cases}$ ; c)  $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + y - z = 2 \\ 3x + y - 3z = 1 \end{cases}$ ;

d)  $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ -3x_1 + x_2 - x_3 - 5x_4 = 0 \\ \phantom{-3x_1} + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$ ; e)  $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 8 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 12 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 4 \end{cases}$ .

14. Korzystając ze wzoru Cramera znaleźć rozwiązania podanych układów równań:

a)  $\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ 4x + y = 7 \end{cases}$ ; b)  $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + 3y + z = 6 \\ 3x + y + 2z = 5 \end{cases}$ ; c)  $\begin{cases} x + 2y + 3z = 2 \\ 4x + 3y - z = 5 \\ x - y + z = 6 \end{cases}$ .

15. Zbadać ilość rozwiązań układów równań w zależności od parametru  $p$ :

a)  $\begin{cases} x + py - z = 1 \\ x + 10y - 6z = p \\ 2x - y + pz = 0 \end{cases}$ ; b)  $\begin{cases} x + 4y - 2z = -p \\ 3x + 5y - pz = 3 \\ px + 3py + z = p \end{cases}$ .

16. Korzystając z metody eliminacji Gaussa wyznaczyć wymiary danych podprzestrzeni przestrzeni  $\mathbb{R}^5$  oraz wskazać ich przykładowe bazy:

a)  $\{[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5] \in \mathbb{R}^5 : \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}\}$ ;

b)  $\text{lin}\{[1, -1, 1, -1, 1], [2, 2, 3, 3, 3], [3, 3, 2, 2, 2], [3, -1, 3 - 1, 3]\}$ .