# Informatyka ISI. Lista 2. Przestrzeń $\mathbb{R}^n$, macierze.

1. Wyznaczyć następujące kombinacje liniowe wektorów:

a) $3 \cdot [2,1,3] + 2 \cdot [-1,4,1]$; b) $2 \cdot [5,4,-1,3] - 3 \cdot [3,3,1,-2]$; c) $2 \cdot [1,2,3] + 3 \cdot [1,1,1] - [5,7,9]$.

2. Wektor $\vec{v}$ zapisać jako kombinację wektorów $\vec{x} = [1,0,0]$, $\vec{y} = [1,1,0]$ i $\vec{z} = [1,1,1]$

a) $\vec{v} = [3,1,2]$; b) $\vec{v} = [2,3,-1]$; c) $\vec{v} = [1,5,4]$.

3. Sprawdzić, które ze zbiorów są podprzestrzeniami przestrzeni $\mathbb{R}^3$:

$W_1 = \{[x,y,z] :\ x,y,z \in \mathbb{R},\ x + 2y = 1\}$; $W_2 = \{[x,y,x+y] :\ x,y \in \mathbb{R}\}$; $W_3 = \{[t,2t,t^2] :\ t \in \mathbb{R}\}$;

$W_4 = \{[x,y,z] :\ x,y,z \in \mathbb{R},\ y + z = 0\}$; $W_5 = \{[x,y,z] :\ x,y,z \in \mathbb{R},\ y \cdot z = 0\}$.

4. Sprawdzić czy dane wektory są liniowo zależne:

a) $[3,2,1],[1,2,0],[1,0,0]$; b) $[1,2,1,2],[2,1,2,1],[1,1,1,1]$ c) $[1,2,3],[1,2,4],[1,2,7]$; d) $[1,1,1],[1,2,3],[5,5,5]$;

e) $[1,2,1,0],[5,7,9,0],[1,2,3,4]$; f) $[1,1,1,1],[2,3,4,5],[4,5,6,7]$.

Wsk. W zadaniach (4) i (5) skorzystać z Twierdzenia 5 z wykładu Alg-lin2-2022sk.

5. Sprawdzić, które z układów wektorów są bazami przestrzeni $\mathbb{R}^n$, do której należą:

a) $([1,2,3],[3,2,1],[5,2,-1])$; b) $([1,1,1,0],[1,1,0,1],[1,0,1,1],[0,1,1,1])$.

6. Sprawdzić, czy wektory $[1,3,1,1]$ i $[1,3,1,3]$ należą do $lin\{[1,1,1,1],[0,1,1,1],[0,0,1,1]\}$.

7. Wyznaczyć wymiary danych podprzestrzeni odpowiedniej przestrzeni $\mathbb{R}^n$ i wskazać ich przykładowe bazy:

a) $lin\{[1,2,3],[1,1,2],[1,3,4]\}$; b) $lin\{[1,1,1,1],[2,1,3,2],[3,4,-1,5],[4,4,1,6]\}$;

c) $lin\{[1,1,2,1],[1,2,1,1],[2,1,5,2],[2,3,3,2]\}$; d) podprzestrzeni z zadania 3.

8. Sprawdzić, czy $lin\{[1,1,2],[1,2,1]\} = lin\{[0,1,-1],[1,3,0]\}$.

9. Wykonać działania z iloczynem skalarnym:

a) $[1,2,3,4] \circ [2,4,1,-3]$; b) $[3,-4,2] \circ [3,4,1] + [-2,2,3] \circ [3,4,1]$; c) $\sqrt{[1,2,-2] \circ [1,2,-2]}$.

10. Obliczyć: a ) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 2 \end{bmatrix}$;

d) $\left( \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$; e) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left( \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \right)$;

f) $\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 11 & -9 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 8 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 7 & 8 \\ -6 & 14 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 8 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; g) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$;

h) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$; i) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 11 & -2 \\ 6 & -14 \\ -21 & 30 \end{bmatrix}$; j) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$.

11. Jakie operacje na wierszach macierzy stojących po prawej stronie w pkt. h), i), j) poprzedniego zadania odpowiadają mnożeniu ich z lewej strony przez dane macierze? Wyznaczyć macierz $A \in \mathbf{M}_{4\times 4}$, która pomnożona przez dowolną macierz $B \in \mathbf{M}_{4\times 4}$ da w wyniku macierz $AB$ powstałą po odjęciu od drugiego wiersza macierzy $B$ jej pierwszego wiersza pomnożonego przez 3.

12. Dla macierzy $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ wyznaczyć $A \cdot B$, $B \cdot A$, $A^T \cdot B^T$ i $B^T \cdot A^T$.

13. Wykonać działania na macierzach we wskazanych ciałach:

a) $\begin{bmatrix} 1+i & i \\ 2-i & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2+i & 1 \\ 2-i & i \end{bmatrix}$ w $\mathbb{C}$; b) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ w $Z_5$; c) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ w $Z_7$; d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^2$ w $Z_2$.