

## Informatyka ISI. Lista 2. Przestrzeń $\mathbb{R}^n$ , macierze.

- Wyznaczyć następujące kombinacje liniowe wektorów:
  - $4 \cdot [2, 1, -3] + 2 \cdot [-1, 4, 1]$ ;
  - $2 \cdot [5, 2, -1, 3] - 3 \cdot [3, 3, 1, 2]$ ;
  - $2 \cdot [1, 2, -1] + 4 \cdot [1, 1, 1] - [6, 8, 2]$ .
- Wektor  $\vec{v}$  zapisać jako kombinację wektorów  $\vec{x} = [1, 0, 0]$ ,  $\vec{y} = [1, 1, 0]$  i  $\vec{z} = [1, 1, 1]$ :
  - $\vec{v} = [4, 3, 2]$
  - $\vec{v} = [3, 2, -1]$ ;
  - $\vec{v} = [1, 5, 4]$ .
- Sprawdzić, które ze zbiorów są podprzestrzeniami przestrzeni  $\mathbb{R}^3$ :
  - $W_1 = \{[x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 = 1\}$ ,
  - $W_2 = \{[x_1, x_2, x_1 + x_2] : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$ ,
  - $W_3 = \{[x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_3 = 0\}$ ,
  - $W_4 = \{[x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{R}^3 : x_1 \cdot x_3 = 0\}$ ,
  - $W_5 = \{[t, 2t, 3t] : t \in \mathbb{R}\}$ .
- Sprawdzić czy dane wektory są liniowo zależne:
  - $[1, 2, 1], [0, 2, 3], [0, 0, 3]$ ;
  - $[1, 3, 1, 3], [3, 1, 3, 1], [1, 1, 1, 1]$
  - $[1, 1, 2], [1, 1, 3], [1, 1, 5]$ ;
  - $[1, 1, 1], [1, 2, 3], [3, 3, 3]$ ;
  - $[1, 2, 1, 0], [5, 7, 9, 3], [1, 2, 3, 4]$ ;
  - $[1, 1, 1, 1], [2, 3, 4, 5], [2, 4, 6, 8]$ .
- Sprawdzić, które z układów wektorów są bazami przestrzeni  $\mathbb{R}^n$ , do której należą:
  - $([1, 2, 3], [3, 5, 1], [5, 8, -1])$ ;
  - $([1, 1, 1, 2], [1, 1, 2, 1], [1, 2, 1, 1], [2, 1, 1, 1])$ .
- Wyznaczyć wymiary danych podprzestrzeni odpowiedniej przestrzeni  $\mathbb{R}^n$  i wskazać ich przykładowe bazy:
  - $\text{lin}\{[1, 2, 3], [1, 1, 2], [1, 3, 4]\}$ ;
  - $\text{lin}\{[1, 1, 1, 1], [2, 1, 3, 2], [3, 4, -1, 5], [4, 4, 1, 6]\}$ ;
  - $\text{lin}\{[1, 1, 2, 1], [1, 2, 1, 1], [2, 1, 5, 2], [2, 3, 3, 2]\}$ ;
  - podprzestrzeni z zadania 3.
- Sprawdzić, czy  $W_1 = \text{lin}\{[1, -1, 1, 1], [1, 1, 1, -1]\} \subset W_2 = \text{lin}\{[1, 1, 1, 1], [0, 1, 1, 1], [0, 0, 1, 1]\}$ .
- Sprawdzić, czy  $\text{lin}\{[1, 1, 1], [1, 2, 3]\} = \text{lin}\{[0, 1, 2], [1, 0, -1]\}$ .
- Wykonać działania z iloczynem skalarnym:
  - $[1, 2, 3, 4] \circ [2, 1, 3, -2]$ ;
  - $[3, -3, 2] \circ [3, 4, 1] + [-2, 1, 3] \circ [3, 4, 1]$
  - $\sqrt{[2, 1, 2] \circ [2, 1, 2]}$ .
- Obliczyć:
  - $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ;
  - $\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ ;
  - $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ ;
  - $\left( \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ ;
  - $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left( \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \right)$ ;
  - $\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 11 & -4 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 8 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 7 & 8 \\ -6 & 14 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 8 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ;
  - $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ ;
  - $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ ;
  - $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 11 & -3 \\ 6 & -12 \\ -21 & 33 \end{bmatrix}$ ;
  - $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ .
- Jakie operacje na wierszach macierzy stojących po prawej stronie w pkt. h), i), j) poprzedniego zadania odpowiadają mnożeniu ich z lewej strony przez dane macierze? Wyznaczyć macierz  $A \in \mathbf{M}_{3 \times 3}$ , która pomnożona przez dowolną macierz  $B \in \mathbf{M}_{3 \times 3}$  da w wyniku macierz  $AB$  powstałą po odjęciu od trzeciego wiersza macierzy  $B$  jej pierwszego wiersza pomnożonego przez 2.
- Dla macierzy  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$  i  $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \end{bmatrix}$  rozstrzygnąć, które działania są wykonalne i wykonać te, które można:
  - $A \cdot B$ ;
  - $B \cdot A$ ;
  - $A^T \cdot B^T$ ;
  - $B^T \cdot A^T$ ;
  - $A \cdot A^T$
  - $B \cdot B^T$ ;
  - $B^T \cdot B$ ;
  - $A^2$ ;
  - $B^2$ .
- Wykonać działania na macierzach we wskazanych ciałach:
  - $\begin{bmatrix} 1+i & 2+i \\ i & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2+i & 1-i \\ 2-i & i \end{bmatrix}$  w  $\mathbb{C}$ ;
  - $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$  w  $Z_5$ ;
  - $\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$  w  $Z_7$ ;
  - $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^2$  i  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{23}$  w  $Z_2$ .