Informatyka ISI. Lista 6. Macierze podobne, ortogonalizacja, geometria analityczna.

1. Sprawdzić, czy dane dwie macierze są podobne:
   a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$;
   d) $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; f) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

2. Zortogonalizować metodą Grama-Schmidta dane układy wektorów:
   a) $[1,1,1], [1,4,4]$; b) $[1,1,-1,0], [3,2,-1,1], [1,1,1,1]$.

3. Wskazać bazy ortonormalne danych podprzestrzeni przestrzeni E^3 i E^4:
   a) $lin\{[1,2,2],[4,2,5]\}$; b) $lin\{[1,1,0,1],[2,-1,0,2],[1,1,1,2]\}$.

4. Wskazać bazę ortogonalną przestrzeni E^3 zawierającą dany wektor $\vec{v}$: a) $\vec{v} = [1,2,3]$; b) $\vec{v} = [3,4,5]$.

5. Wyznaczyć cosinusy kątów pomiędzy danymi wektorami:
   a) $\vec{a} = [2,2,1]$, $\vec{b} = [2,-1,2]$, b) $\vec{a} = [1,2,3,4]$, $\vec{b} = [4,3,2,1]$.

6. Sprawdzić, czy punkty $A = (1,2,1)$, $B = (2,4,2)$, $C = (-1,3,3)$ i $D = (4,3,0)$ są współpłaszczyznowe.

7. Obliczyć: a) $[4,2,3] \times [1,2,4]$, b) $[2,3,3] \times [2,5,4] + [2,1,2] \times [2,3,3]$, c) $([1,1,4] \times [3,-1,2]) \circ [1,1,2]$.

8. Wyznaczyć pola trójkąta ABC, gdy $A = (3,1,4)$, $B = (2,3,6)$, $C = (5,-1,1)$ oraz odległość punktu C od prostej AB.

9. Dla czworościanu o wierzchołkach $A = (1,3,3)$, $B = (3,4,5)$, $C = (1,2,6)$, $D = (2,3,2)$ wyznaczyć objętość i długość jego wysokości opuszczonej z wierzchołka D.

10. Napisać równanie płaszczyzny spełniającej dane warunki:
    (a) przechodzącej przez punkt $P = (-1,3,4)$ i prostopadłej do wektora $\vec{N} = [2,3,-2]$;
    (b) przechodzącej przez punkty $P = (1,2,3)$, $Q = (4,3,1)$ i $R = (2,5,6)$;
    (c) zawierającej prostą $l_1: \frac{x}{2} = \frac{y+1}{4} = \frac{z}{-2}$ i równoległej do prostej $l_2: \frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = z - 1$.

11. Podać postać parametryczną i kanoniczną prostej spełniającej dane warunki:
    (a) przechodzącej przez punkty $P = (2,0,1)$, $Q = (4,2,4)$;
    (b) przechodzącej przez punkt $P = (1,-2,5)$ i prostopadłej do płaszczyzny $\Pi: 3x - 2y + 4z - 7 = 0$;
    (c) krawędzi płaszczyzn $\Pi_1: x - 2y + z = 0$ i $\Pi_2: 2x + y + z = 4$.

12. Znaleźć punkt symetryczny do punktu $P = (0,1,3)$ względem:
    a) punktu $S = (2,0,-1)$; b) prostej $l: \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1}$ c) płaszczyzny $\Pi: x + y + z = 10$.

13. Obliczyć odległość:
    (a) płaszczyzn równoległych $\Pi_1: 2x - y + 2z + 5 = 0$, $\Pi_2: 2x - y + 2z - 4 = 0$;
    (b) prostych równoległych $l_1: \frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-1}$, $l_2: \frac{x-5}{-2} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z-1}{2}$;
    (c) prostych skośnych $l_1: \frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z}{1}$, $l_2: \frac{x}{-2} = \frac{y+3}{3} = \frac{z-2}{2}$.

14. Wyznaczyć kąt pomiędzy: a) prostą $l: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = z - 1$ i płaszczyzną $\Pi: x - 2y - 2z + 1 = 0$; b) płaszczyznami $\Pi_1: x - 2y + 4z - 5 = 0$ i $\Pi_2: x + y - 2z + 3 = 0$.

15. Wyznaczyć odległość pomiędzy rozłącznymi przekątnymi sąsiednich ścian sześcianu o boku 10 cm.

16. Zdiagonalizować ortogonalnie dane macierze symetryczne. Wskazać odpowiednie macierze diagonalne i ortogonalne:
    a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$; e) $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$; f) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.