Informatyka ISI. Lista 5. Przekształcenia liniowe

1. Sprawdzić, które z danych przekształceń są liniowe:

   (a) $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2;\quad [x, y] \mapsto [x - y, x + y]$,

   (b) $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2;\quad [x, y] \mapsto [|x|, y]$,

   (c) $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2;\quad [x, y] \mapsto [xy, x - y]$,

   (d) symetria względem prostej $y = -x$ w $\mathbb{R}^2$,

   (e) symetria względem prostej $x = 1$ w $\mathbb{R}^2$,

   (f) $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3;\quad t \mapsto [t, -t, t^2]$,

   (g) $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3;\quad t \mapsto [t, -2t, 3t]$,

   (h) $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3;\quad [x, y] \mapsto [x + y, x + 2, y - x]$,

   (i) $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3;\quad [x, y] \mapsto [x - y, 2x + y, y - 2x]$,

   (j) $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2;\quad [x, y, z] \mapsto [x + 2y - 2z, -2x - 4y + 4z]$,

   (k) $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3;\quad [x, y, z] \mapsto [x + y + z, 2x + 3y + z, 2x + y + 3z]$.

2. Wypisać macierze przekształceń liniowych z zad.1 (w bazach kanonicznych).

3. Wyznaczyć jądra i obrazy przekształceń liniowych z zad.1.

4. Wyznaczyć jądra i obrazy przekształceń liniowych o danych macierzach w bazach kanonicznych:

   a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & -1 \end{bmatrix}$, c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$. d) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

5. Dowolna permutacja wektorów bazy kanonicznej przestrzeni $\mathbb{R}^n$ determinuje automorfizm liniowy tej przestrzeni. Wyznaczyć macierze takich automorfizmów dla permutacji $\sigma = (1, 2, 3)$ i $\tau = (1, 4)(2, 3)$ wektorów bazowych przestrzeni $\mathbb{R}^4$.

6. Wyznaczyć wartości własne, wektory własne i podprzestrzenie niezmiennicze podanych endomorfizmów. Tam, gdzie jest baza wektorów własnych podać macierz endomorfizmu w tej bazie:
   a) $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2;\quad [x, y] \mapsto [-3x - 12y, 2x + 7y]$; b) $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2;\quad [x, y] \mapsto [2x - y, 4x + y]$;
   c) $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2;\quad [x, y] \mapsto [2x + 4y, 2y]$; d) $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3;\quad [x, y, z] \mapsto [x, 2x - y, -x + y + 2z]$.

7. Wyznaczyć wartości i wektory własne oraz podprzestrzenie niezmiennicze endomorfizmów o podanych macierzach w bazach kanonicznych:

   a) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 0 & -4 & -2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; d) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

8. Wyznaczyć macierze przejścia z baz kanonicznych do danych baz oraz określić współrzędne danych wektorów $\vec{v}$ w tych bazach:
   a) $B = \{[3, 7], [2, 5]\}$, $\vec{v} = [4, 1]$ b) $B = \{[8, 5], [5, 4]\}$, $\vec{v} = [-3, 2]$; c) $B = \{[1, 0, 0], [2, 1, 0], [-2, 3, 1]\}$, $\vec{v} = [4, 5, 6]$.

9. Wyznaczyć macierze przekształceń w zadanych bazach mając dane ich macierze w bazach kanonicznych:

   a) $B = \{[1, 2], [2, 5]\}$, $A = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 10 & -2 \end{bmatrix}$; b) $B = \{[1, 0, 0], [1, 1, 0], [1, 1, 1]\}$, $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$;

   c) $B = \{[2, 1], [3, 1]\}$, $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$; d) $B = \{[0, 0, 1], [1, 0, 0], [0, 1, 0]\}$, $A = \begin{bmatrix} 2 & 9 & 4 \\ 7 & 5 & 3 \\ 6 & 1 & 8 \end{bmatrix}$.

10. W zadaniach 6 a) i 6 d) sprawdzić wzór $A' = S^{-1}AS$, gdzie S jest macierzą przejścia z bazy kanonicznej do bazy wektorów własnych, a A' macierzą przekształcenia w tej bazie.