Macierze symetryczne i ortogonalne

Def. 1. Macierz kwadratową A nazywamy:

1. *macierzą symetryczną*, gdy $A = A^T$,
2. *ortogonalną*, gdy $A^{-1} = A^T$.

Wn. 1. *Warunek ortogonalności macierzy A można też zapisać $AA^T = I$ lub równoważnie $A^T A = I$. Wiersze macierzy ortogonalnej są wzajemnie ortogonalnymi wektorami jednostkowymi. To samo zachodzi dla kolumn.*

Przykłady: 1 (Macierze ortogonalne). $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, $\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & -8 & -4 \\ -8 & 1 & -4 \\ -4 & -4 & 7 \end{bmatrix}$.
Pierwsza jest macierzą obrotu wokół Oz, ostatnia jest symetryczna i ortogonalna.

Endomorfizmy ortogonalne

Def. 2. Endomorfizm liniowy L, który zachowuje iloczyn skalarny nazywamy *Endomorfizmem ortogonalnym.*

$$\vec{x} \circ \vec{y} = L(\vec{x}) \circ L(\vec{y})$$

dla dowolnych $\vec{x}, \vec{y}$.

Wn. 2. *Endomorfizm ortogonalny L zachowuje długość wektora, ortogonalność wektorów i kąty pomiędzy wektorami $\vec{x}, \vec{y}$:*

1. $|\vec{x}| = |L(\vec{x})|$ *dla dowolnego $\vec{x}$, (czyli L jest izometrią),*
2. $\vec{x} \perp \vec{y} \Rightarrow L(\vec{x}) \perp L(\vec{y})$,
3. $\angle(\vec{x}, \vec{y}) = \angle(L(\vec{x}), L(\vec{y}))$.
4. *Macierz A endomorfizmu L w bazie standardowej jest ortogonalna wtedy i tylko wtedy, gdy L jest ortogonalny.*

Grupy $O(n)$ i $SO(n)$

Twierdzenie 1.
1. *Macierze ortogonalne stopnia n z działaniem mnożenia tworzą grupę przekształceń.*
2. *Wyznacznik macierzy ortogonalnej jest równy* 1 *lub* -1.
3. *Macierze ortogonalne stopnia n o wyznaczniku jeden są podgrupą grupy wszystkich macierzy ortogonalnych stopnia n.*

Def. 3. Grupę macierzy ortogonalnych stopnia n nazywamy *grupą ortogonalną stopnia n* i oznaczamy $O(n)$, a jej podgrupę macierzy o wyznaczniku 1 nazywamy *specjalną grupą ortogonalną* i oznaczamy $SO(n)$.

Diagonalizacja macierzy symetrycznych za pomocą macierzy ortogonalnych

Twierdzenie 2. *Macierz endomorfizmu L w dowolnej bazie ortonormalnej jest symetryczna wtedy i tylko wtedy, gdy $L(\vec{x}) \circ \vec{y} = \vec{x} \circ L(\vec{y})$ dla dowolnych wektorów $\vec{x}$ i $\vec{y}$.*

Twierdzenie 3. *Niech A będzie macierzą symetryczną stopnia n. Wówczas:*

1. *Wartości własne macierzy A są liczbami rzeczywistymi.*
2. *Wektory własne odpowiadające różnym wartościom własnym są ortogonalne.*
3. *Istnieje baza przestrzeni E^n złożona z unormowanych i ortogonalnych wektorów własnych macierzy A. Macierz S przejścia z bazy kanonicznej do bazy wektorów własnych jest ortogonalna i macierz $S^T AS$ jest diagonalna.*

Twierdzenie 4. *Macierz rzeczywista jest diagonalizowalna za pomocą macierzy ortogonalnej wtedy i tylko wtedy, gdy jest symetryczna.*

Przykład: 1. Zdiagonalizować ortogonalnie dane macierze symetryczne. Wskazać odpowiednie macierze diagonalne i ortogonalne.

1. $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$,
2. $\begin{bmatrix} 5 & -4 & 2 \\ -4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 8 \end{bmatrix}$.

Def. 4. Mówimy, że macierz symetryczna A jest *dodatnio półokreślona*, gdy dla dowolnego wektora X zachodzi $X^T AX \geq 0$, a *dodatnio określona*, gdy dla dowolnego niezerowego X zachodzi $X^T AX > 0$.

Wn. 3. *Dodatnio półokreślona macierz symetryczna ma nieujemne wartości własne, a dodatnio określona - dodatnie.*

Wn. 4. *Dla dowolnej macierzy A (niekoniecznie kwadratowej):*

1. *macierz AA^T jest dodatnio półokreśloną macierzą symetryczną,*
2. *niezerowe wartości własne macierzy AA^T i $A^T A$ są takie same.*

SVD - Singular Value Decomposition

Dla dowolnej macierzy $A \in \mathbf{M}_{m\times n}$ rzędu r szukamy takich liczb $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_r$ spełniających warunek $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq ... \geq \sigma_r > 0$ oraz takich ortonormalnych baz $\{V_1, V_2, ..., V_n\}$ przestrzeni $\mathbb{R}^n$ i $\{U_1, U_2, ..., U_m\}$ przestrzeni $\mathbb{R}^m$, że

$$AV_1 = \sigma_1 U_1, ..., AV_r = \sigma_r U_r, \qquad AV_{r+1} = 0, ..., AV_n = 0.$$

Jeśli V jest (ortogonalną) macierzą o kolumnach V_i, U jest (również ortogonalną) macierzą o kolumnach U_i i $\Sigma \in \mathbf{M}_{m\times n}$ spełnia waruenki $[\Sigma]_{ii} = \sigma_i$ dla $i = 1, 2, ..., r$, $[\Sigma]_{ij} = 0$ dla pozostałych i, j, to warunek przyjmuje postać: $AV = U\Sigma$ lub równoważnie

$$A = U\Sigma V^T,$$

którą nazywamy *rozkładem według wartości osobliwych*, $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_r$ nazywamy *wartościami osobliwymi*, $U_1, U_2, ..., U_m$ - *lewostronnymi*, a $V_1, V_2, ..., V_n$ - *prawostronnymi wektorami osobliwymi*.

Twierdzenie 5. *Dla dowolnej macierzy A istnieje SVD (rozkład według wartości osobliwych.*

Algorytm:

1. Prawostronne wektory osobliwe V_i są unormowanymi wektorami własnymi macierzy $A^T A$ uporządkowanymi od największej wartości własnej λ_1 do najmniejszej niezerowej λ_r.
2. Wyznaczamy wartości osobliwe $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ dla $i = 1, 2, ..., r$.
3. Lewostronne wektory U_i są unormowanymi obrazami wektorów V_i dla $i = 1, 2, ..., r$. Zachodzi przy tym $U_i = \dfrac{AV_i}{\sigma_i}$.
4. Dla $n > r$ lub $m > r$ za pozostałe V_i lub U_i bierzemy wektory z ortonormalnych baz jądra przekształcenia o macierzy A lub odpowiednio A^T.

Przykład: 2. Wyznaczyć SVD macierzy $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$.