Przestrzeń afiniczna

Def. 1. *Przestrzenią afiniczną* związaną z przestrzenią liniową V nazywamy dowolny niepusty zbiór $\mathbf{P}$ z działaniem $\omega: \mathbf{P}\times\mathbf{P}\to V$ (które dowolnej parze elementów zbioru $\mathbf{P}$ przyporządkowuje wektor z przestrzeni V) spełniającym aksjomaty:

1. $\omega(A,B)=\vec{0}\leftrightarrow A=B$,
2. $\omega(A,B)+\omega(B,C)=\omega(A,C)$,
3. Dla dowolnych $A\in\mathbf{P}$ i $\vec{v}\in V$ istnieje $B\in\mathbf{P}$ taki, że $\omega(A,B)=\vec{v}$.

Elementy zbioru $\mathbf{P}$ nazywamy *punktami*. Punkty A, B nazywamy początkiem i końcem wektora $\omega(A,B)$. Piszemy $\overrightarrow{AB}:=\omega(A,B)$.

Jeśli w przestrzeni V określony jest iloczyn skalarny, to $\mathbf{P}$ nazywamy *afiniczną przestrzenią euklidesową*.

Uwaga 1. Dowolną przestrzeń wektorową V można traktować jako przestrzeń afiniczną przyjmując $\mathbf{P}=V$ i $\omega(\vec{u},\vec{v}):=\vec{v}-\vec{u}$.

Punkty i wektory w E^3

- Punkty oznaczamy $P=(x,y,z)$. Wektor $\overrightarrow{OP}=[x,y,z]$ nazywamy *wektorem wodzącym* punktu P.
- Dla dowolnych punktów $A=(a_1,a_2,a_3)$ i $B=(b_1,b_2,b_3)$ współrzędne wektora $\overrightarrow{AB}$ wyznaczamy odejmując od współrzędnych końca współrzędne początku czyli
$$\overrightarrow{AB}=[b_1-a_1,b_2-a_2,b_3-a_3].$$
- Współrzędne końca wektora $\overrightarrow{r}=\overrightarrow{PQ}=[x_1,x_2,x_3]$ zaczepionego w punkcie $P=(p_1,p_2,p_3)$ wyznaczamy dodając do współrzędnych początku współrzędne wektora czyli
$$Q=P+\overrightarrow{r}=(p_1+x_1,p_2+x_2,p_3+x_3).$$
- Długość wektora $\overrightarrow{r}=[x_1,x_2,x_3]$ wyraża się wzorem:
$$|\overrightarrow{r}|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}.$$
- Iloczyn skalarny wektorów $\overrightarrow{a}=[a_1,a_2,a_3]$ i $\overrightarrow{b}=[b_1,b_2,b_3]$:
$$\overrightarrow{a}\circ\overrightarrow{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=|\overrightarrow{a}|\cdot|\overrightarrow{b}|\cdot\cos\angle(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}).$$
- Kąt pomiędzy wektorami $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ wyznaczamy ze wzoru:
$$\cos\angle(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b})=\frac{\overrightarrow{a}\circ\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}|\cdot|\overrightarrow{b}|}.$$

- Rzutem prostokątnym wektora $\vec{a}$ na wektor $\vec{b}$ jest wektor:

$$\frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}.$$

- Wektory bazy kanonicznej (wersory osi układu współrzędnych) oznacza się: $\vec{i} = [1, 0, 0]$, $\vec{j} = [0, 1, 0]$, $\vec{k} = [0, 0, 1]$.
- Punkty P, Q, R są *współliniowe* (tzn. leżą na jednej prostej) gdy wektory $\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}$ są liniowo zależne (czyli proporcjonalne).
- Punkty P, Q, R, S są *współpłaszczyznowe* (tzn. leżą w jednej płaszczyźnie) gdy wektory $\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PS}$ są liniowo zależne.

Przykład 1. Sprawdzić czy punkty $P = (1, 1, 1)$, $Q = (2, 1, 2,)$, $R = (3, 4, 3)$, $S = (2, 2, 2)$ są współpłaszczyznowe.

Iloczyn wektorowy

Def. 2. Mówimy, że układ wektorów $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ jest zorientowany zgodnie z bazą, gdy wyznacznik macierzy współrzędnych tych wektorów w tej bazie jest dodatni.

Def. 3. *Iloczynem wektorowym* wektorów $\vec{a}, \vec{b}$ nazywamy:

1. wektor $\vec{w}$ ortogonalny do $\vec{a}, \vec{b}$, którego długość jest równa polu równoległoboku rozpiętego na $\vec{a}, \vec{b}$ i taki że układ $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{w})$ jest zorientowany zgodnie z bazą, gdy $\vec{a}, \vec{b}$ są liniowo niezależne,
2. wektor zerowy $\vec{0}$, gdy $\vec{a}, \vec{b}$ są liniowo zależne.

   Iloczyn wektorowy oznaczamy $\vec{w} = \vec{a} \times \vec{b}$.

Postać analityczna iloczynu wektorowego

Twierdzenie 1.

$$[a_1, a_2, a_3] \times [b_1, b_2, b_3] = \left[\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right]$$

$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$, *gdzie* $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ *są wektorami bazy kanonicznej.*

Własności iloczynu wektorowego:

1. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$,
2. $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$,
3. $(c\vec{a}) \times \vec{b} = c(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times (c\vec{b})$,
4. $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\angle(\vec{a}, \vec{b})$

Iloczyn mieszany

Def. 4. *Iloczynem mieszanym* wektorów $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ nazywamy $\vec{a} \circ (\vec{b} \times \vec{c})$.

Twierdzenie 2. $\vec{a} \circ (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

Wn. 1.

1. *Objętość równoległościanu rozpiętego na wektorach* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$: $V(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = |\vec{a} \circ (\vec{b} \times \vec{c})| = \left| \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \right|$.
2. *Objętość czworościanu o wierzchołkach* P, Q, R, S: $V(P, Q, R, S) = \frac{1}{6}|\vec{a} \circ (\vec{b} \times \vec{c})|$, *gdzie* $\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$, $\vec{b} = \overrightarrow{PR}$, $\vec{c} = \overrightarrow{PS}$.

Płaszczyzna w E^3

Twierdzenie 3 (Postać normalna płaszczyzny)**.** *Dla dowolnego wektora* $\vec{N} = [A, B, C] \neq \vec{\theta}$ *i punktu* $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ *równanie*

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

opisuje płaszczyznę prostopadłą do $\vec{N}$ *i przechodzącą przez* P_0 *(*$\vec{N}$ *nazywamy wektorem normalnym tej płaszczyzny).*

Inne postaci równania płaszczyzny:

- Postać ogólna: $Ax + By + Cz + D = 0$.
- Postać odcinkowa: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.
- Postać parametryczna: $P = P_0 + u\vec{a} + v\vec{b}$, gdzie $\vec{a}, \vec{b}$ są liniowo niezależne.

  Przykład 2. Wyznaczyć równanie płaszczyzny przechodzącej przez dane punkty $P = (0, 1, 1)$; $Q = (2, 3, 4)$; $R = (4, 2, 1)$.

Uwaga 2. Mając dane wektory $\vec{a}, \vec{b}$ równoległe do płaszczyzny, wektor normalny płaszczyzny wyznaczymy najprościej za pomocą iloczynu wektorowego

$$\vec{N} = \vec{a} \times \vec{b}.$$

Prosta w E^3

Postać parametryczna prostej o danym wektorze kierunkowym $\vec{k} \neq \vec{\theta}$, przechodzącej przez punkt P_0:

- $X = P_0 + t\overrightarrow{k}$ gdzie $t \in \mathbb{R}$.

  Dla $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ i $\overrightarrow{k} = [a, b, c]$ dostajemy:

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

  Postać kanoniczna:

- $$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

  Zredukowana postać kanoniczna prostej równoległej do płaszczyzny Oxy:

- $\dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b}, \qquad z = z_0.$

Kąty

- Kąt pomiędzy płaszczyznami Π_1, Π_2 o wektorach normalnych odpowiednio $\overrightarrow{N}_1, \overrightarrow{N}_2$:

$$\cos \angle(\Pi_1, \Pi_2) = \Big| \frac{\overrightarrow{N}_1 \circ \overrightarrow{N}_2}{|\overrightarrow{N}_1| \cdot |\overrightarrow{N}_2|} \Big|.$$

- Kąt pomiędzy prostymi l_1, l_2 o wektorach kierunkowych odpowiednio $\overrightarrow{k}_1$, $\overrightarrow{k}_2$:

$$\cos \angle(l_1, l_2) = \Big| \frac{\overrightarrow{k}_1 \circ \overrightarrow{k}_2}{|\overrightarrow{k}_1| \cdot |\overrightarrow{k}_2|} \Big|.$$

- Kąt pomiędzy prostą l o wektorze kierunkowym $\overrightarrow{k}$ i płaszczyzną Φ o wektorze normalnym $\overrightarrow{N}$:

$$\sin \angle(l, \Phi) = \Big| \frac{\overrightarrow{k} \circ \overrightarrow{N}}{|\overrightarrow{k}| \cdot |\overrightarrow{N}|} \Big|.$$

Odległości

- Odległość punktu $P = (x_0, y_0, z_0)$ od płaszczyzny $\Phi: \ Ax + By + Cz + D = 0$:

$$\mathbf{d}(P, \Phi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

- Odległość punktu P od prostej $l: \ X = P_0 + t\overrightarrow{k}$:

$$\mathbf{d}(P, l) = \frac{|\overrightarrow{k} \times \overrightarrow{P_0P}|}{|\overrightarrow{k}|}.$$

- Odległość pomiędzy prostymi skośnymi $l_1: \ X = P_1 + t\overrightarrow{k_1}$ i $l_2: \ X = P_2 + t\overrightarrow{k_2}$:

$$\mathbf{d}(l_1, l_2) = \frac{|(\overrightarrow{k_1} \times \overrightarrow{k_2}) \circ \overrightarrow{P_1P_2}|}{|\overrightarrow{k_1} \times \overrightarrow{k_2}|}.$$

Przykłady:

1. Wyznaczyć punkt symetryczny do $P = (3, 1, -1)$ względem płaszczyzny $\Pi: \ 3x + y + z = 20$.

2. Płaski stok opada w kierunku wschodnim pod kątem $\alpha = 30°$ a w kierunku południowym pod kątem $\beta = 45°$. Obliczyć kąt nachylenia tego stoku do poziomu.

3. Obliczyć odległość przekątnej przestrzennej sześcianu o boku długości 10 cm od rozłącznej z nią przekątnej ściany.