Zmiana bazy

Przykład: 1. Wektor $\vec{v} = [x_1, x_2, x_3]$ zapisać jako kombinację wektorów $\vec{u}_1 = [1, 0, 0]$, $\vec{u}_2 = [1, 1, 0]$ i $\vec{u}_3 = [1, 1, 1]$. Wyznaczyć następującą kombinację liniową wektorów: $x_1'\vec{u}_1 + x_2'\vec{u}_2 + x_3'\vec{u}_3$.

Def. 1. *Macierzą przejścia z bazy kanonicznej do bazy* $B = \{\vec{b_1}, \vec{b_2}, ..., \vec{b_n}\}$ przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^n$ nazywamy macierz, której kolumnami są współrzędne w bazie kanonicznej kolejnych wektorów bazy B.

Uwaga 1. W Def.1 bazę kanoniczną można zastąpić dowolną inną bazą.

Uwaga 2. Macierz przejścia z bazy kanonicznej do bazy B jest macierzą w bazie kanonicznej automorfizmu liniowego przeprowadzającego bazę kanoniczną w bazę B.

Twierdzenie 1. *Jeśli S jest macierzą przejścia z bazy kanonicznej do bazy B, a* $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $X' = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix}$ *macierzami współrzędnych dowolnego wektora w bazie kanonicznej i odpowiednio w bazie B, to*

$$X' = S^{-1}X \qquad (X = SX').$$

Twierdzenie 2. *Jeżeli S jest macierzą przejścia z bazy kanonicznej do bazy B, A macierzą endomorfizmu L w bazie kanonicznej, a A' jego macierzą w bazie B, to*

$$A' = S^{-1}AS.$$

Macierze podobne i diagonalizowane

Def. 2. Niech A, B będą macierzami kwadratowymi stopnia n. Mówimy, że macierz A jest podobna do macierzy B, gdy istnieje macierz nieosobliwa S taka, że $A' = S^{-1}AS$.

Wn. 1. *Macierze A, A' są podobne wtedy i tylko wtedy, gdy są macierzami tego samego endomorfizmu w pewnych bazach.*

Wn. 2. *Macierze podobne mają te same wyznaczniki, równania charakterystyczne i wartości własne.*

Def. 3. Macierz podobną do macierzy diagonalnej nazywamy macierzą *diagonalizowalną.*

Wn. 3. *Macierz kwadratowa stopnia n, która ma n różnych wartości własnych jest diagonalizowalna.*

Wn. 4. *Macierz kwadratowa jest diagonalizowalna wtedy i tylko wtedy, gdy ma bazę wektorów własnych.*

Przykłady: 1. 1. Wyznaczyć współrzędne wektora $[5,7]$ w bazie $B = \{[2,1],[3,2]\}$,

wyznaczyć macierz powinowactwa $L : [x,y] \mapsto [x,2y]$ w tej bazie. Czy otrzymana macierz jest diagonalizowalna?

2. Sprawdzić, czy macierz ścięcia $L : [x,y] \mapsto [x, x+y]$ jest diagonalizowalna.

3. Endomorfizm liniowy ma w bazie kanonicznej macierz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

   Wyznaczyć jego macierz w bazie $\{[1,0,0],[1,1,0],[1,1,1]\}$.

4. Sprawdzić, czy macierz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ jest diagonalizowalna.

Ślad macierzy

Def. 4. *Śladem* macierzy kwadratowej nazywamy sumę jej wyrazów głównej przekątnej. Ślad macierzy A oznaczamy $\mathrm{tr}(A)$. Stosuje się też oznaczenia $\mathrm{Tr}(A)$ i $\mathrm{trace}(A)$.

Twierdzenie 3. *1.* $\mathrm{tr}(A+B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$*;*

2. $\mathrm{tr}(rA) = r\mathrm{tr}(A)$*;*

3. $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$*.*

Wn. 5. *1. Macierze podobne mają jednakowe ślady.*

2. Ślad macierzy diagonalizowalnej jest sumą jej wartości własnych (branych z krotnościami).

Przestrzenie euklidesowe

Def. 5. Przestrzeń liniową, w której określony jest iloczyn skalarny nazywamy *przestrzenią euklidesową*. Przestrzeń euklidesową związaną z przestrzenią liniową $\mathbb{R}^n$ oznaczamy E^n.

Uwaga 3. Długość wektora w przestrzeni euklidesowej określona wzorem $|\vec{x}| = \sqrt{\vec{x} \circ \vec{x}}$ nazywana jest też jego *normą* i oznaczana $||\vec{x}||$.

Twierdzenie 4 (Nierówność Schwarza)**.** *Dla dowolnych wektorów $\vec{x}$, $\vec{y}$ przestrzeni euklidesowej zachodzi:*

$$(\vec{x} \circ \vec{y})^2 \leq (\vec{x} \circ \vec{x})(\vec{y} \circ \vec{y}).$$

W przestrzeni E^n:

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\Big)^2 \leq \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\Big).$$

Wektory ortogonalne, kąty

Def. 6. Mówimy, że wektory $\vec{x}$ i $\vec{y}$ są *ortogonalne* (*prostopadłe*), gdy $\vec{x} \circ \vec{y} = 0$. Piszemy $\vec{x} \perp \vec{y}$.

Def. 7. *Kątem* pomiędzy niezerowymi wektorami $\vec{x}$ i $\vec{y}$ nazywamy liczbę rzeczywistą $\varphi \in [0, \pi]$ taką, że

$$\cos\varphi = \frac{\vec{x} \circ \vec{y}}{|\vec{x}| \cdot |\vec{y}|}.$$

Uwaga 4. W przestrzeniach E^2 i E^3 tak zdefiniowany kąt jest odpowiednikiem rzeczywistej miary kąta pomiędzy wektorami.

Wn. 6. $\vec{x} \circ \vec{y} = |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \cdot \cos\varphi$.

Ortogonalizacja Grama-Schmidta

Def. 8. Bazę nazywamy *ortogonalną, gdy każde jej dwa wektory są ortogonalne.* Jeśli dodatkowo jej wektory są unormowane, to nazywamy ją *bazą ortonormalną*.

Twierdzenie 5. *Niech $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_k\}$ będzie bazą podprzestrzeni W przestrzeni euklidesowej E^n. Wówczas układ wektorów:*

$$\begin{cases} \vec{v}_1 = \vec{u}_1, \\ \vec{v}_2 = \vec{u}_2 - \frac{\vec{u}_2 \circ \vec{v}_1}{|\vec{v}_1|^2}\vec{v}_1, \\ \vec{v}_3 = \vec{u}_3 - \left[\frac{\vec{u}_3 \circ \vec{v}_1}{|\vec{v}_1|^2}\vec{v}_1 + \frac{\vec{u}_3 \circ \vec{v}_2}{|\vec{v}_2|^2}\vec{v}_2\right], \\ \vdots \\ \vec{v}_k = \vec{u}_k - \left[\frac{\vec{u}_k \circ \vec{v}_1}{|\vec{v}_1|^2}\vec{v}_1 + ... + \frac{\vec{u}_k \circ \vec{v}_{k-1}}{|\vec{v}_{k-1}|^2}\vec{v}_{k-1}\right], \end{cases} ;$$

jest ortogonalną bazą podprzestrzeni W.

Def. 9. Dla dowolnych wektorów $\vec{u}, \vec{v}$ wektor $\frac{\vec{u} \circ \vec{v}}{|\vec{v}|^2}\vec{v}$ nazywamy *rzutem prostokątnym* wektora $\vec{u}$ na wektor $\vec{v}$.

Uwaga 5. Ortogonalizacja Grama-Schmidta polega na odejmowaniu od kolejnych wyjściowych wektorów sum ich rzutów prostokątnych na poprzednie wektory.

Uwaga 6. Wektory $\vec{v}_i$ w ortogonalizacji można zastąpić dowolnymi wektorami z nimi proporcjonalnymi.

Przykład: 2. Zortogonalizować metodą Grama-Schmidta układy wektorów:

1. $\{[1, 2, 2], [2, 1, 2]$.
2. $\{[0, 1, 1], [1, 0, 1], [1, 1, 0]\}$