Przekształcenia liniowe

Def. 1. *Przekształceniem liniowym* (*homomorfizmem liniowym*) rzeczywistych przestrzeni liniowych U i V nazywamy dowolną funkcję $L: U \to V$ spełniającą warunki:

1. $L(\vec{u} + \vec{v}) = L(\vec{u}) + L(\vec{v})$ dla dowolnych $\vec{u}, \vec{v} \in U$;
2. $L(a\vec{u}) = aL(\vec{u})$ dla dowolnych $\vec{u} \in U$ i $a \in \mathbb{R}$.

Uwaga 1. Warunki 1., 2. można zastąpić jednym warunkiem:

$$L(a\vec{u} + b\vec{v}) = aL(\vec{u}) + bL(\vec{v})$$

dla dowolnych $\vec{u}, \vec{v} \in U$ i $a, b \in \mathbb{R}$.

Twierdzenie 1. *Przekształcenie liniowe $L : U \to V$ jest określone jednoznacznie przez podanie obrazów wektorów dowolnej bazy przestrzeni U.*

Przykłady z $\mathbb{R}^2$

Uwaga 2. W dowolnym przekształceniu liniowych wektor zerowy przechodzi w wektor zerowy.

- Symetrie względem osi układu współrzędnych.
- Symetria względem początku układu współrzędnych.
- Symetria względem prostej $y = x$.
- Jednokładność o środku w początku układu współrzędnych i skali k.
- Obrót wokół początku układu współrzędnych o dowolny kąt α.
- Rzuty prostokątne na Ox i Oy.
- Powinowactwo o osi Ox, kierunku Oy i skali k

$$[x, y] \mapsto [x, ky].$$

- Przesunięcie o wektor $[a, b]$ nie jest przekształceniem linowym.

Macierz przekształcenia liniowego

Def. 2. Niech $B_U = \{\vec{u_1}, \vec{u_2}, ..., \vec{u_n}\}$ i $B_V = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, ..., \vec{v_m}\}$ będą bazami przestrzeni linowych U i V. Macierzą przekształcenia liniowego $L: U \to V$ w bazach B_U i B_V nazywamy macierz $A_{m\times n}$, której kolejnymi kolumnami są współrzędne w bazie B_V wektorów

$$L(\vec{u_1}), L(\vec{u_2}), ..., L(\vec{u_n})$$

(czyli obrazów kolejnych wektorów bazy B_U).

Uwaga 3. Najczęściej za B_U i B_V przyjmujemy bazy kanoniczne przestrzeni $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{R}^m$. Gdy mówimy o macierzy przekształcenia liniowego nie wskazując baz zawsze mamy na myśli bazy kanoniczne.

Uwaga 4. Dla dowolnej macierzy $A = A_{m\times n}$ istnieje przekształcenie liniowe $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ o macierzy A w bazach kanonicznych (lub dowolnych innych bazach).

Twierdzenie 2 (O postaci przekształcenia liniowego)**.** *Niech $A = A_{m\times n}$ będzie macierzą przekształcenia liniowego $L :\ U \to V$ w bazach B_U, B_V i niech*

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

będą odpowiednio macierzami współrzędnych wektorów $\vec{u}$ i $L(\vec{u})$ w tych bazach. Wówczas

$$Y = AX.$$

Uwaga 5. Składaniu przekształceń liniowych odpowiada mnożenie ich macierzy. Dokładniej jeśli A jest macierzą przekształcenia $L :\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ i B jest macierzą przekształcenia $K :\ \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$, to $B\cdot A$ jest macierzą złożenia $K\circ L :\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$.

Przykłady macierzy przekształceń liniowych przestrzeni $\mathbb{R}^2$

- Symetrie względem osi Ox i Oy: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.
- Symetria względem $(0,0)$: $-J = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.
- Jednokładność o środku $(0,0)$ i skali k: $\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$;
- Powinowactwo o osi Ox, kierunku Oy i skali k: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$;
- Symetria względem prostej $y = x$: $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$;
- Obrót o kąt α wokół początku układu współrzędnych: $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$.
- Rzuty prostokątne na osie Ox i Oy $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Jądro i obraz przekształcenia liniowego

Def. 3. *Jądrem* przekształcenia liniowego $L:\ U \to V$ nazywamy zbiór $\mathrm{Ker}L$ określony wzorem:

$$\mathrm{Ker}L = \{\vec{u} \in U : L(\vec{u}) = \vec{0}\}.$$

Def. 4. *Obrazem* przekształcenia liniowego $L:\ U \to V$ nazywamy zbiór $\mathrm{Im}L$ określony wzorem:

$$\mathrm{Im}L = \{L(\vec{u}) : \vec{u} \in U\},$$

czyli zbiór takich wektorów $\vec{v}$ przestrzeni V, które są obrazami wektorów przestrzeni U w przekształceniu L.

Twierdzenie 3. *Jądro przekształcenia liniowego $L:\ U \to V$ jest podprzestrzenią przestrzeni U, a jego obraz podprzestrzenią przestrzeni V.*

Przykłady

- Jądro obrotu wokół początku układu współrzędnych o dowolny kąt składa się tylko z wektora zerowego, a jego obrazem jest cała płaszczyzna.
- Jądrem rzutu na Ox w $\mathbb{R}^2$ jest Oy, czyli $lin\{[0,1]\}$, a obrazem Ox, czyli $lin\{[1,0]\}$.
- Dla przekształcenia $L:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3;\ \ [x,y,z] \mapsto [x,y,0]$ $\mathrm{Ker}L = lin\{[0,0,1]\}$, $\mathrm{Im}L = lin\{[1,0,0],[0,1,0]\}$ Jest to rzut na płaszczyznę xOy w kierunku Oz.
- Dla przekształcenia $L:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R};\ \ [x,y,z] \mapsto x-y+z$; jądrem jest płaszczyzna o równaniu $x-y+z=0$, a obrazem cała przestrzeń $\mathbb{R}$.
- Wyznaczyć jądra i obrazy przekształceń:
  1. $L:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3;\ \ [x,y] \mapsto [x+y, 2x-y, y]$;
  2. $L:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3;\ \ [x,y,z] \mapsto [x+y-2z, 2x+3y+z, x-7z]$;
  3. $L:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4;\ \ [x,y,z] \mapsto [x+2y+3z, y+2z, -x+z, y+2z]$.

Algorytm wyznaczania jądra i obrazu

Jądro i bazę obrazu przekształcenia liniowego o macierzy $A \in \mathbf{M}_{m\times n}$ można znaleźć następująco metodą eliminacji Gaussa:

1. Tworzymy podwójną macierz $[I_n|A^T]$.
2. Za pomocą operacji elementarnych na wierszach podwójnej macierzy sprowadzamy A^T do postaci schodkowej.
3. Niezerowe wiersze przekształconej macierzy A^T tworzą bazę obrazu.
4. Wiersze przekształconej macierzy I_n stojące przed wierszami zerowymi przekształconej macierzy A^T tworzą bazę jądra.

Twierdzenie 4. *Niech $L: U \to V$ będzie dowolnym przekształceniem liniowym przestrzeni U w dowolną przestrzeń V. Wówczas wymiar przestrzeni U jest równy sumie wymiarów jądra i obrazu przekształcenia L.*

$$\dim(U) = \dim(\mathrm{Ker} L) + \dim(\mathrm{Im} L).$$

Izomorfizmy liniowe

Def. 5. Wzajemnie jednoznaczne przekształcenie $L : U \to V$ nazywamy *izomorfizmem*. Przestrzenie liniowe U i V nazywamy *izomorficznymi*, gdy istnieje izomorfizm $L: U \to V$.

Wn. 1. *Jeśli $L: U \to V$ jest izomorfizmem, to*

1. $\mathrm{Ker} L = \{\vec{0}\}$, *gdzie $\vec{0}$ jest wektorem zerowym przestrzeni U;*
2. $\mathrm{Im} L = V$*;*
3. $\dim U = \dim V$*;*
4. *Macierz przekształcenia L jest nieosobliwa.*

Przykład: 1. Przestrzeń liniowa $\mathbf{M}_{m \times n}$ jest izomorficzna z przestrzenią wektorową $\mathbb{R}^{m \cdot n}$.

Działania na przekształceniach liniowych

- Suma przekształceń liniowych liniowych $L_1, L_2: U \to V$ określona wzorem
  $$(L_1 + L_2)(\vec{u}) := L_1(\vec{u}) + L_2(\vec{u}) \ \text{ dla } \ \vec{U} \in U$$
  jest przekształceniem liniowym.
- Iloczyn przekształcenia liniowego przez liczbę określony wzorem
  $$(aL)(\vec{u}) := aL(\vec{u}) \ \text{ dla } \ \vec{U} \in U$$
  jest przekształceniem liniowym.
- Zbiór wszystkich przekształceń liniowych $L: U \to V$ z działaniami dodawania przekształceń i mnożenia ich przez liczby jest przestrzenią liniową. Oznaczamy ją $L(U, V)$.
- Jeżeli $\dim U = n$ i $\dim V = m$, to przestrzeń $L(U, V)$ jest izomorficzna z przestrzenią $\mathbf{M}_{m \times n}$.

Endomorfizmy i automorfizmy liniowe

Def. 6.
1. Dowolne przekształcenie liniowe $L: V \to V$ przestrzeni liniowej w siebie nazywamy *endomorfizmem.*
2. Dowolny endomorfizm, który jest izomorfizmem (czyli przekształceniem wzajemnie jednoznacznym) nazywamy *automorfizmem liniowym.*

Wn. 2. *Macierz endomorfizmu przestrzeni* $\mathbb{R}^n$ *jest macierzą kwadratową stopnia* n.

Wn. 3. *Macierz dowolnego automorfizmu liniowego* $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *jest nieosobliwa,* $\mathrm{Ker}L = \{\vec{0}\}$, $\dim(\mathrm{Im}L) = n$.

Uwaga 6. Izomorfizmy grup, pierścieni, ciał określa się analogicznie jak izomorfizmy przestrzeni liniowych jako przekształcenia wzajemnie jednoznaczne, które zachowują działania tych struktur.

Uwaga 7. Zbiór wszystkich endomorfizmów liniowych z działaniem dodawania przekształceń i ich składania jest przykładem nieprzemiennego pierścienia. Dla przestrzeni $\mathbb{R}^n$ pierścień ten jest izomorficzny z pierścieniem macierzy kwadratowych stopnia n z działaniami dodawania i mnożenia macierzy.

Uwaga 8. Automorfizmy dowolnej przestrzeni liniowej z działaniem składania przekształceń są przykładem grupy nieprzemiennej. Dla przestrzeni $\mathbb{R}^n$ grupa ta jest izomorficzna z grupą wszystkich macierzy nieosobliwych stopnia n. Oznaczamy ją $GL(n, \mathbb{R})$.

Podprzestrzenie niezmiennicze ednomorfizmów

Def. 7.
1. Podprzestrzeń W przestrzeni V nazywamy podprzestrzenią *niezmienniczą endomorfizmu* L przestrzeni V, gdy
$$L(W) \subset W.$$
2. Liczbę λ nazywamy *wartością własną endomorfizmu* L, gdy istnieje niezerowy wektor $\vec{v} \in V$ taki, że
$$L(\vec{v}) = \lambda\vec{v}.$$
3. Każdy niezerowy wektor $\vec{v}$ spełniający powyższą równość nazywamy *wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej* λ.

Przykłady

1. Rzut na Ox ma dwie wartości własne $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_2 = 0$. Wartości własnej λ_1 odpowiadają wektory własne z $lin\{[1, 0]\}$, a wartości własnej λ_2 wektory z $lin\{[0, 1]\}$.

2. Symetria względem Ox ma wartości własne $1, -1$. Wartości własnej 1 odpowiadają wektory własne z $lin\{[1,0]\}$, a wartości własnej -1 wektory z $lin\{[0,1]\}$.

3. Symetria względem prostej $y = x$ ma te same wartości własne, co symetria względem Ox, ale odpowiadają im wektory własne $[1,1]$ i $[1,-1]$.

4. Powinowactwo o osi Ox, kierunku Oy i skali k ma wartości własne 1 i k. Odpowiadają im wektory własne $[1,0]$ i $[0,1]$.

5. Jednokładność o skali k ma podwójną wartość własną k. Każdy niezerowy wektor płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ jest jej wektorem własnym.

6. Obrót o kąt miary $\alpha \neq \pi$ nie ma wartości i wektorów własnych.

7. Rzut na xOy w kierunku Oz ma podwójną wartość własną 1 i wartość własną 0.

Twierdzenie 5. *1. Zbiór wszystkich wektorów własnych endomorfizmu L odpowiadających ustalonej wartości własnej λ*

$$W_\lambda := \{\vec{v} \in V : \ L(\vec{v}) = \lambda \vec{v}\}$$

jest podprzestrzenią niezmienniczą.

2.

$$W_\lambda = \mathrm{Ker}(L - \lambda I),$$

gdzie I jest przekształceniem identycznościowym przestrzeni V.

3. Jeśli A jest macierzą endomorfizmu L, to λ jest jego wartością własną wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\det(A - \lambda I) = 0;$$

4. Podprzestrzeń wektorów własnych odpowiadających wartości własnej λ jest rozwiązaniem jednorodnego układu równań o macierzy $A - \lambda I$.

Def. 8. Wielomian $w(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ nazywamy *wielomianem charakterystycznym* endomorfizmu L, równanie $\det(A - \lambda I) = 0$ jego *równaniem charakterystycznym.*

Uwaga 9. Pojęcia równania charakterystycznego oraz wartości i wektorów własnych przenosimy z endomorfizmów na macierze.

- Równanie $\det(A - \lambda I) = 0$ nazywamy *równaniem charakterystycznym macierzy A.*

- Pierwiastki równania charakterystycznego macierzy A nazywamy jej *wartościami własnymi.*

- Dowolny niezerowy wektor $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ spełniający równanie $AX = \lambda X$ nazywamy *wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej* λ.

Twierdzenie 6. *1. Wektory własne odpowiadające różnym wartościom własnym są liniowo niezależne.*

2. Jeżeli endomorfizm liniowy $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *ma* n *różnych wartości własnych, to odpowiadające im wektory własne tworzą bazę przestrzeni* $\mathbb{R}^n$.

3. Macierz endomorfizmu liniowego w bazie jej wektorów własnych ma postać diagonalną:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{bmatrix}$$

gdzie $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ *są wartościami własnymi, którym odpowiadają kolejne wektory bazy wektorów własnych.*

Przykłady

1. Wyznaczyć wartości własne i odpowiadające im podprzestrzenie wektorów własnych podanych endomorfizmów:

   a) $L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$; $[x, y] \mapsto [x + y, y]$. Przekształcenie to nazywamy *ścięciem* o osi Ox.

   b) $L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$; $[x, y, z] \mapsto [2x + 3y + z, y + z, 2z]$.

2. Wyznaczyć wartości i wektory własne podanych macierzy:

   a) $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

   b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.