Permutacje

Def. 1. *Permutacją* nazywamy dowolne wzajemnie jednoznaczne przekształcenie niepustego zbioru X na siebie.

Twierdzenie 1. *Zbiór wszystkich permutacji zbioru X z działaniem ich składania (superpozycji) jest grupą.*

Grupę permutacji zbioru n-elementowego oznaczamy S_n. Jej *rząd*, czyli ilość elementów, to $n!$. Utożsamiając X z $\{1, 2, ..., n\}$ permutacje zapisujemy:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & ... & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Uwaga 1. Składając permutacje czytamy je od prawej strony, ponieważ $\tau\sigma(X) = \tau \circ \sigma(X) = \tau(\sigma(X))$.

Cykle

Def. 2. Permutację $\pi \in S_n$ nazywamy *cyklem* rzędu k (*cyklem k-wyrazowym*) jeżeli istnieje taki pozdbiór $Y = \{a_1, a_2, ..., a_k\} \subset \{1, 2, ..., n\}$, że

- $\pi(a_i) = a_{i+1}$ dla $i \in \{1, ..., k-1\}$,
- $\pi(a_k) = a_1$ i
- $\pi(m) = m$ dla $m \notin Y$.

Taki cykl zapisujemy $(a_1, a_2, ..., a_k)$.

Permutacja tożsamościowa *id* jest cyklem rzędu 0

Twierdzenie 2. *Każda permutacja jest cyklem lub złożeniem cykli rozłącznych. Rozkład na cykle jest jednoznaczny z dokładnością do kolejności czynników.*

Transpozycje

Def. 3. Cykl rzędu 2 nazywamy *transpozycją*.

Twierdzenie 3. *Każda permutacja jest złożeniem transpozycji.*

Przykładowy rozkład cyklu rzędu k na transpozycje:

$$(a_1, a_2, ..., a_k) = (a_1, a_k)...(a_1, a_4)(a_1, a_3)(a_1, a_2).$$

Twierdzenie 4. *Każda transpozycja jest złożeniem nieparzystej liczby transpozycji liczb sąsiednich.*

Def. 4. Mówimy, że dwie wartości permutacji σ tworzą *inwersję*, gdy mniejszemu argumentowi i odpowiada większa wartość $\sigma(i)$. Permutację $\sigma \in S_n$ nazywamy *parzystą* lub *nieparzystą*, gdy ma odpowiednio parzystą lub nieparzystą liczbę inwersji.

Def. 5. *Znakiem* permutacji σ jest liczba 1, gdy jest ona parzysta, a liczba -1, gdy jest nieparzysta. Znak permutacji σ oznaczamy $\operatorname{sgn}(\sigma)$.

Wn. 1.

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^k,$$

gdzie k jest ilością inwersji permutacji σ.

Twierdzenie 5. *Znak permutacji zmienia się na przeciwny po złożeniu jej z dowolną transpozycją.*

Wn. 2. *Iloczyn dowolnych k transpozycji ma znak $(-1)^k$.*

Wn. 3. *Różnica liczb czynników w dowolnych dwóch rozkładach tej samej permutacji jest liczbą parzystą.*

Wn. 4. *Dla $k \geq 2$ cykl rzędu k ma znak $(-1)^{k-1}$.*

Wn. 5. *W dowolnej grupie S_n $(n \geq 2)$ jest tyle samo permutacji parzystych i nieparzystych.*

Twierdzenie 6 (Permutacyjna definicja wyznacznika)**.** *Dla dowolnej macierzy kwadratowej $A = [a_{ij}]$ stopnia n:*

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} ... a_{n\sigma(n)}.$$

Lemat 7. *Jeżeli permutacja σ' powstaje z permutacji*

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & ... & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

poprzez wykreślenie jednej kolumny $\begin{pmatrix} i \\ j = \sigma(i) \end{pmatrix}$ i zmniejszenie o jeden argumentów większych od i oraz wartości większych od j, to

$$\operatorname{sgn}(\sigma') = (-1)^{i+j} \operatorname{sgn}(\sigma).$$

Typy permutacji

Def. 6. Mówimy, że permutacja σ jest typu $[1^{\alpha_1}, 2^{\alpha_2}, ..., k^{\alpha_k}]$, gdy ma α_1 punktów stałych oraz w rozkładzie na cykle rozłączne ma α_i cykli długości i dla $i \in \{2, 3, ..., k\}$. W opisie typu wyrażenia z $\alpha_i = 0$ pomijamy. Permutacje tego samego typu nazywamy też *podobnymi*.

Wn. 6. *Jeśli σ jest typu $[1^{\alpha_1}, 2^{\alpha_2}, ..., k^{\alpha_k}]$ to $\sigma \in S_n$ dla $n = \sum_{i=1}^{k} i\alpha_i$.*

Wn. 7. *W S_n jest*

$$\frac{n!}{\alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdot ... \cdot \alpha_k! \cdot 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\alpha_3} \cdot ... \cdot k^{\alpha_k}}$$

permutacji typu $[1^{\alpha_1}, 2^{\alpha_2}, ..., k^{\alpha_k}]$.

Przykład: 1. Permutacje $\sigma = (1,2)(3,4)(5,6,7)$ i $\tau = (1,2,3)(5,6,7)$ z S_7 są odpowiednio typu $[2^2, 3^1]$ i $[1^1, 3^2]$. Wszystkich permutacji podobnych do σ jest w S_7 $\dfrac{7!}{2! \cdot 2^2 \cdot 3^1} = 210$, a podobnych do τ - $\dfrac{7!}{2! \cdot 3^2} = 280$.

Przykład: 2. W podgrupie A_5 permutacji parzystych grupy S_5 mamy następujące klasy permutacji podobnych oraz ich liczebności i typy:

- $|[id]| = \dfrac{5!}{5!} = 1$, typ $[1^5]$;
- $|[1,2,3]| = \dfrac{5!}{2! \cdot 3^1} = 20$, typ $[1^2, 3^1]$;
- $|[(1,2)(3,4)]| = \dfrac{5!}{2! \cdot 2^2} = 15$, typ $[1^1, 2^2]$;
- $|[1,2,3,4,5]| = \dfrac{5!}{5^1} = 24$, typ $[5^1]$.

Def. 7. Permutacje $\alpha, \beta \in S_n$ nazywamy *sprzężonymi*, gdy istnieje taka permutacja $\sigma \in S_n$, że

$$\beta = \sigma\alpha\sigma^{-1}.$$

Twierdzenie 8. *Permutacje α i β są podobne wtedy i tylko wtedy, gdy są sprzężone.*

Lemat 9. *Dla dowolnego cyklu $\alpha = (a_1, a_2, ..., a_k) \in S^n$ i dowolnej permutacji $\sigma \in S_n$:*

$$\sigma\alpha\sigma^{-1} = (\sigma(a_1), \sigma(a_2), ..., \sigma(a_k)).$$