Wyznacznik

Def. 1. *Wyznacznikiem* macierzy kwadratowej nazywamy funkcję, która każdej macierzy $A = (a_{ij})$ przyporządkowuje liczbę $\det A$ zgodnie z następującym schematem indukcyjnym:

1. Dla macierzy $A = (a_{11})$ stopnia 1:

$$\det A := a_{11},$$

2. Dla macierzy stopnia $n \geq 2$:

$$\det A := \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j},$$

   gdzie A_{ij} oznacza macierz powstałą z macierzy A przez skreślenie i-tego wiersza i j-tej kolumny.

Wyrażenie $(-1)^{i+j} \det A_{ij}$ nazywamy *dopełnieniem algebraicznym* wyrazu a_{ij}. Stosujemy również oznaczenie $|a_{ij}| := \det(a_{ij})$.

Wn. 1 (Wyznacznik macierzy stopnia 2:). $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

Wn. 2 (Wzór Sarrusa:). $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32})$

Uwaga 1. Wzór Sarrusa stosujemy tylko i wyłącznie do macierzy stopnia 3!!!

Rozwinięcie Laplace'a

Twierdzenie 1. *Wyznacznik macierzy $A = (a_{ij})$ jest równy rozwinięciu względem dowolnego wiersza lub dowolnej kolumny:*

- $\det A := \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} \det A_{kj}$

  (rozwinięcie względem k-tego wiersza)

- $\det A := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \det A_{ik}$

  (rozwinięcie względem k-tej kolumny)

Własności wyznacznika

1. $\det A = \det A^T$.
2. $\det I_n = 1$.(macierz jednostkowa dowolnego stopnia ma wyznacznik równy 1)
3. Wyznacznik macierzy trójkątnej jest równy iloczynowi wyrazów głównej przekątnej.
4. Jeśli w macierzy zamienimy miejscami dwa wiersze (dwie kolumny), to wyznacznik zmieni znak na przeciwny.
5. Jeśli macierz A posiada dwa jednakowe wiersze (kolumny), to $\det A = 0$.
6. $\det \begin{vmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_{k-1} \\ aw_k \\ w_{k+1} \\ \vdots \\ w_n \end{vmatrix} = a \det \begin{vmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_{k-1} \\ w_k \\ w_{k+1} \\ \vdots \\ w_n \end{vmatrix}$ (z dowolnego wiersza (kolumny) można wyciągnąć stałą przed wyznacznik).
7. $\det \begin{vmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_{k-1} \\ w_k + w_k' \\ w_{k+1} \\ \vdots \\ w_n \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_{k-1} \\ w_k \\ w_{k+1} \\ \vdots \\ w_n \end{vmatrix} + \det \begin{vmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_{k-1} \\ w_k' \\ w_{k+1} \\ \vdots \\ w_n \end{vmatrix}$

   i analogicznie dla kolumn.
8. Jeżeli macierz A ma zerowy wiersz (kolumnę), to $\det A = 0$.
9. Jeżeli do dowolnego wiersza (kolumny) macierzy dodamy dowolną kombinację liniową pozostałych, to wyznacznik nie zmieni się.

Uwaga 2. Własności 6., 9. pozwalają zastosować metodę Gaussa do szybkiego obliczania wyznaczników dowolnego stopnia. Po wyzerowaniu wszystkich poza jednym wyrazów wiersza (kolumny) rozwinięcie Laplace'a obniża o jeden stopień wyznacznika.

10. Jeśli $A = (a_{ij})_{n \times n}$, $B = (b_{ij})_{m \times m}$, $C = (c_{ij})_{m \times n}$ i

$$D := \left[\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & 0 & 0 & ... & 0 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & 0 & 0 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} & 0 & 0 & ... & 0 \\ c_{11} & c_{12} & ... & c_{1n} & b_{11} & b_{12} & ... & b_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & ... & c_{2n} & b_{21} & b_{22} & ... & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & ... & c_{mn} & b_{m1} & b_{m2} & ... & b_{mm} \end{array}\right],$$

to

$$\det D = \det A \cdot \det B.$$

Twierdzenie 2 (Cauchy'ego)**.**

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B.$$

Def. 2. Macierz kwadratową A nazywamy *nieosobliwą* $\Leftrightarrow$ $\det A \neq 0$.

Twierdzenie 3. *Dowolna macierz nieosobliwa $A = (a_{ij})$ ma macierz odwrotną $A^{-1} = (b_{ij})$. Jej wyrazy wyznaczamy ze wzoru:*

$$b_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} \det A_{ji}}{\det A}$$

(gdzie $(-1)^{i+j} \det A_{ji}$ jest dopełnieniem algebraicznym wyrazu a_{ji}).

Algorytm wyznaczania macierzy odwrotnej:

1. Obliczamy $\det A$. A^{-1} wyznaczamy tylko w przypadku $\det A \neq 0$.
2. Wyznaczamy *macierz dopełnień algebraicznych* $D := ((-1)^{i+j} \det A_{ij})$.
3. Transponujemy macierz D.
4. $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot D^T$.

Wyznacznik, a rząd macierzy

Twierdzenie 4. *Rząd macierzy kwadratowej A stopnia n jest równy n $\Leftrightarrow$ $\det A \neq 0$.*

Def. 3. *Minorem stopnia k* macierzy $A_{m \times n}$ nazywamy wyznacznik dowolnej macierzy powstałej z A przez skreślenie $m - k$ wierszy i $n - k$ kolumn.

Twierdzenie 5. *Rząd macierz jest równy najwyższemu stopniowi jej niezerowego minora.*

Układ m równań liniowych z n niewiadomymi

$$\left\{\begin{array}{ccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right.$$

Macierz układu: $A := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix}$

Macierz uzupełniona: $U := \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$

Macierzowy zapis układu

$$AX = B$$

gdzie A jest macierzą układu, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ są odpowiednio wektorami niewiadomych i wyrazów wolnych.

Przykłady: 1. Rozwiązać układy równań:

1. $\left\{\begin{array}{rrrrcl} x_1 & -x_2 & +x_3 & -x_4 & = & 1 \\ -2x_1 & +x_2 & +x_3 & & = & 1 \\ & -x_2 & +3x_3 & -2x_4 & = & 3 \\ -3x_1 & +x_2 & +3x_3 & -x_4 & = & 3 \end{array}\right.$

2. $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$

Twierdzenie 6 (Kroneckera-Capellego)**.** *Niech A, U będą odpowiednio macierzą i macierzą uzupełnioną układu równań liniowych z n niewiadomymi. Układ ten ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $rA = rU$. Jeśli $rA = rU = n$, to układ ma dokładnie jedno rozwiązanie. Jeśli $rA = rU = k < n$, to układ ma nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od $n - k$ parametrów.*

Uwaga 3 (Ogólna postać rozwiązania:).

$$X = X_0 + \sum_{i=1}^{n-k} t_i X_i.$$

Jeśli $rA \neq rU$, to układ nie ma rozwiązania. Taki układ nazywamy *sprzecznym.*

Układy jednorodne

Def. 4. Układ równań $AX = B$ nazywamy *jednorodnym* gdy wektor B wyrazów wolnych jest wektorem zerowym.

Wn. 3. *Układ jednorodny zawsze ma rozwiązanie. Jest ono $(n-k)$-wymiarową podprzestrzenią liniową przestrzeni $\mathbb{R}^n$, gdzie n jest ilością niewiadomych, a k jest rzędem macierzy układu.*

$$X = \sum_{i=1}^{n-k} t_i X_i = lin\{X_1, X_2, ..., X_{n-k}\}.$$

Uwaga 4. Rozwiązanie układu niejednorodnego dostajemy dodając do dowolnego wektora X_0 spełniającego układ rozwiązanie układu jednorodnego.

Układy Cramera

Def. 5. *Układem Cramera* nazywamy układ n równań z n niewiadomymi, którego macierz jest nieosobliwa.

Twierdzenie 7 (Cramera). *Układ Cramera ma dokładnie jedno rozwiązanie. Jest ono określone wzorem:*

$$x_j = \frac{\det A_j}{\det A},$$

gdzie dla $j \in \{1, ..., n\}$, A_j oznacza macierz powstałą po zamianie w macierzy A układu j-tej kolumny, kolumną wyrazów wolnych B.

Uwaga 5. Układ Cramera $AX = B$ można również rozwiązać wyznaczając $X = A^{-1}B$ z równania macierzowego. Najszybsza jest jednak metoda Gaussa!

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & -x_3 & = & 0 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 & = & 2 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 4 \end{cases}$$

Algorytm odwracania macierzy oparty na eliminacji Gaussa:

1. Obok macierzy A piszemy macierz jednostkową tego samego stopnia,

2. Za pomocą operacji na wierszach tak zbudowanej (podwójnej) macierzy sprowadzamy A do postaci jednostkowej,

3. Wyjściowa macierz jednostkowa zostaje przekształcona w A^{-1}.