Przestrzeń wektorowa $\mathbb{R}^n$

Def. 1. Rzeczywistą n-wymiarową przestrzenią wektorową (liniową) $\mathbb{R}^n$ nazywamy zbiór n-wyrazowych ciągów liczb rzeczywistych $[x_1, x_2, ..., x_n]$ z następującymi działaniami dodawania wektorów i mnożenia wektorów przez liczby:

$$[x_1, x_2, ..., x_n] + [y_1, y_2, ..., y_n] := [x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n],$$

$$a \cdot [x_1, x_2, ..., x_n] := [a \cdot x_1, a \cdot x_2, ..., a \cdot x_n].$$

Wektory oznaczamy: $\overrightarrow{x} := [x_1, x_2, ..., x_n]$.

Wektor *zerowy* to $\overrightarrow{0} := [0, 0, ..., 0]$.

Uwaga 1. Analogicznie określamy n-wymiarową zespoloną przestrzeń wektorową $\mathbb{C}^n$ przyjmując liczby zespolone zamiast rzeczywistych oraz przestrzenie Z_p^n.

Przestrzeń liniowa

Def. 2. Niepusty zbiór V nazywa się *przestrzenią liniową* (lub *wektorową*) nad ciałem K, jeśli

1. V z działaniem dodawania jest grupą abelową;
2. określone jest działanie mnożenia elementów zbioru V przez elementy ciała K spełniające warunki:
   (a) $1 \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}$
   (b) $a(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) = a\overrightarrow{x} + a\overrightarrow{y}$
   (c) $(a + b)\overrightarrow{x} = a\overrightarrow{x} + b\overrightarrow{x}$
   (d) $a(b\overrightarrow{x}) = (ab)\overrightarrow{x}$

Małe łacińskie litery oznaczają tu elementy ciała K i nazywamy je *skalarami*, 1 jest elementem neutralnym mnożenia w tym ciele, a litery ze strzałką oznaczają elementy zbioru V i nazywamy je *wektorami*. Element neutralny grupy wektorów $(V, +)$ nazywamy *wektorem zerowym*.

Twierdzenie 1. *Przestrzeń wektorowa $\mathbb{R}^n$ jest przestrzenią liniową.*

Def. 3. Dowolny podzbiór W przestrzeni liniowej V będący przestrzenią liniową względem dodawania wektorów z V i mnożenia ich przez skalary z K nazywamy *podprzestrzenią przestrzeni liniowej V*.

Uwaga 2. Wprost z definicji wynika, że wektor zerowy należy do każdej podprzestrzeni i zbiór złożony tylko z wektora zerowego jest najmniejszą podprzestrzenią dowolnej przestrzeni. Podprzestrzeń taką nazywamy *podprzestrzenią zerową*.

Twierdzenie 2. *Dla dowolnego niepustego podzbioru W przestrzeni V następujące warunki są równoważne:*

1. *W jest podprzestrzenią,*

2. *dla dowolnych wektorów $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in W$ i dowolnego skalara a wektory $\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}$ i $a\overrightarrow{x}$ należą do W,*

3. *dla dowolnych wektorów $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in W$ i dowolnych skalarów a, b wektor $a\overrightarrow{x} + b\overrightarrow{y}$ należy do W.*

Przykład: 1. Weźmy w $\mathbb{R}^3$ zbiory:

1. $W_1 = \{[x_1, x_2, 0] : \ x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$,
2. $W_2 = \{[x_1, x_2, x_3] : x_1 + x_2 + x_3 = 0; \ x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$,
3. $W_3 = \{[x_1, x_2, 1] : \ x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$,
4. $W_4 = \{[x_1, x_2, x_3] : x_1 + x_2 + x_3 = 1; \ x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$,
5. $W_5 = \{[t, 2t, t^2] : t \in \mathbb{R}\}$.

W_1 i W_2 są podprzestrzeniami przestrzeni $\mathbb{R}^3$, a W_3, W_4 i W_5 nie są.

Kombinacje liniowe

Def. 4. Kombinacją liniową wektorów $\overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{x}_2, ..., \overrightarrow{x}_k$ o współczynnikach $a_1, a_2, ..., a_k$ nazywamy wektor

$$\sum_{i=1}^{k} a_i \overrightarrow{x}_i = a_1 \overrightarrow{x}_1 + a_2 \overrightarrow{x}_2 + ... + a_k \overrightarrow{x}_k.$$

Twierdzenie 3. *Dla dowolnego podzbioru S przestrzeni V zbiór wszystkich kombinacji liniowych wektorów z S jest podprzestrzenią.*

Podprzestrzeń tę oznaczmy $linS$ i nazywamy *podprzestrzenią generowaną przez zbiór S.*

Liniowa niezależność wektorów

Def. 5. Mówimy, że wektory $\overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{x}_2, ..., \overrightarrow{x}_k$ są *liniowo niezależne* gdy z zerowania się dowolnej ich kombinacji liniowej wynika zerowanie się wszystkich współczynników tej kombinacji.

$$\sum_{i=1}^{k} a_i \overrightarrow{x}_i = \overrightarrow{0} \Rightarrow a_1 = a_2 = ... = a_k = 0.$$

Uwaga 3. Wektory są liniowo zależne gdy istnieją takie $a_1, a_2, ..., a_k$, nie wszystkie równe 0, że

$$\sum_{i=1}^{k} a_i \overrightarrow{x}_i = \overrightarrow{0}.$$

Twierdzenie 4. *Wektory są liniowo zależne $\Leftrightarrow$ jeden z nich można zapisać jako kombinację liniową pozostałych.*

- Wektor zerowy jest liniowo zależny od każdego innego wektora.
- Każdy układ wektorów zawierający wektor zerowy jest liniowo zależny.
- Dowolny niezerowy wektor generuje *prostą*.
- Dowolne dwa wektory liniowo niezależne generują *płaszczyznę*.

Przykład: 2. 1. $lin\{[1,2,1]\} = \{[t,2t,t]: \ t \in \mathbb{R}\}$ jest prostą zawartą w $\mathbb{R}^3$.

2. $lin\{[1,1,1],[1,1,0],[0,0,1]\} = lin\{[1,1,0],[0,0,1]\}$ jest płaszczyzną zawartą w $\mathbb{R}^3$, ponieważ wektory $[1,1,0]$ i $[0,0,1]$ są niezależne, a $[1,1,1] = [1,1,0]+[0,0,1]$.

Baza i wymiar przestrzeni i podprzestrzeni

Twierdzenie 5 (Steinitza). *Niech wektory $\overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{x}_2, ..., \overrightarrow{x}_n$ generują przestrzeń V, a wektory $\overrightarrow{y}_1, \overrightarrow{y}_2, ..., \overrightarrow{y}_k \in V$ będą liniowo niezależne. Wówczas $k \leq n$.*

Def. 6. Maksymalny układ wektorów liniowo niezależnych nazywamy *bazą* (przestrzeni liniowej lub jej podprzestrzeni).

Twierdzenie 6. *Wektory $\overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{x}_2, ..., \overrightarrow{x}_n$ tworzą bazę $\Leftrightarrow$ każdy wektor można zapisać jednoznacznie w postaci ich kombinacji liniowej.*

Twierdzenie 7. *Jeżeli przestrzeń liniowa (lub podprzestrzeń) ma bazę n-elementową, to każda jej baza ma n elementów.*

Ilość wektorów bazy nazywamy *wymiarem* przestrzeni (lub podprzestrzeni) V i oznaczamy $\dim V$. *Bazę kanoniczną* przestrzeni $\mathbb{R}^3$ tworzą wektory $[1,0,0],[0,1,0],[0,0,1]$. Analogicznie dla dowolnego n.

Lemat 8. *Liniowa niezależność układu wektorów $\overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{x}_2, \overrightarrow{x}_3, ..., \overrightarrow{x}_k$ jest równoważna liniowej niezależności układu wektorów*

$$\overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{x}_2 - a\overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{x}_3, ..., \overrightarrow{x}_k$$

dla dowolnego skalara a.

Wn. 1. *Liniowa zależność (bądź niezależność) układu k wektorów nie zmieni się, gdy*

1. *dowolne kombinacje liniowe jednego z nich odejmiemy od pozostałych wektorów;*
2. *od jednego z wektorów odejmiemy dowolną kombinację liniową pozostałych.*

Przykład: 3. Sprawdzić, czy wektory $[1,1,1]$, $[2,3,4]$, $[3,5,7]$ są liniowo zależne.

Iloczyn skalarny w $\mathbb{R}^n$

Def. 7. *Iloczynem skalarnym* wektorów $\overrightarrow{x} = [x_1, x_2, ..., x_n]$ i $\overrightarrow{y} = [y_1, y_2, ..., y_n]$ nazywamy liczbę: $\overrightarrow{x} \circ \overrightarrow{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n$.

Twierdzenie 9 (Własności iloczynu skalarnego). *1.* $\overrightarrow{x} \circ \overrightarrow{y} = \overrightarrow{y} \circ \overrightarrow{x}$,

2. $(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) \circ \overrightarrow{z} = \overrightarrow{x} \circ \overrightarrow{z} + \overrightarrow{y} \circ \overrightarrow{z}$,

3. $a(\overrightarrow{x} \circ \overrightarrow{y}) = (a\overrightarrow{x}) \circ \overrightarrow{y} = \overrightarrow{x} \circ (a\overrightarrow{y})$,

4. $\overrightarrow{x} \circ \overrightarrow{x} \geq 0$ *i* $\overrightarrow{x} \circ \overrightarrow{x} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$.

Długością wektora $\overrightarrow{x}$ nazywamy $\sqrt{\overrightarrow{x} \circ \overrightarrow{x}}$.

Macierz

Def. 8. Niech $i \in \{1, ..., m\}$, $j \in \{1, ..., n\}$. *Macierzą rzeczywistą* o m wierszach i n kolumnach nazywamy dowolną funkcję, która wszystkim parom (i, j) przyporządkowuje liczby rzeczywiste a_{ij}. Stosujemy oznaczenia: A, $A_{m\times n}$, (a_{ij}), $(a_{ij})_{m\times n}$.

Macierz zapisujemy: $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix}$

Wiersze macierzy są wektorami przestrzeni $\mathbb{R}^n$ a kolumny $\mathbb{R}^m$. Macierz można natomiast traktować jako wektor przestrzeni $\mathbb{R}^{m\cdot n}$. $(m \times m)$-macierze nazywamy *kwadratowymi.*

Uwaga 4. W taki sam sposób określa się macierz zespoloną, która parom indeksów przyporządkowuje liczby zespolone i macierze nad dowolnymi innymi ciałami.

Działania na macierzach

Macierze o tych samych wymiarach dodajemy i mnożymy przez liczby tak samo jak wektory przestrzeni $\mathbb{R}^{m\cdot n}$ tzn.:

$$c \cdot (a_{ij})_{m\times n} := (c \cdot a_{ij})_{m\times n}; \quad (a_{ij})_{m\times n} + (b_{ij})_{m\times n} := (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n}.$$

Zbiór $(m \times n)$-macierzy z tak określonymi działaniami jest przestrzenią liniową. Oznaczamy ją $\mathbf{M}_{m\times n}$.

Def. 9. Iloczynem macierzy $(a_{ij})_{m\times k}$ i $(b_{ij})_{k\times n}$ nazywamy macierz $(c_{ij})_{m\times n}$, której współczynniki są określone wzorem:

$$c_{ij} := \sum_{l=1}^{k} a_{il} \cdot b_{lj}.$$

(wyraz c_{ij} macierzy wyniku jest iloczynem skalarnym i-tego wiersza pierwszej i j-tej kolumny drugiej macierzy.)

Uwaga 5. Mnożymy macierze tylko gdy wiersze pierwszej są tej samej długości co kolumny drugiej czyli gdy pierwsza ma tyle samo kolumn co druga wierszy.

Uwaga 6. Mnożenie macierzy nie jest przemienne!

- Transpozycją macierzy $A = (a_{ij})_{m\times n}$ nazywamy macierz $A^T = (b_{ij})_{n\times m}$, gdzie $b_{ij} = a_{ji}$, dla wszystkich i, j. Wierszami macierzy A^T są kolumny macierzy A (a kolumnami oczywiście wiersze macierzy A).
- Macierz kwadratową (a_{ij}) nazywamy:

  diagonalną gdy $a_{ij} = 0$ dla $i \neq j$,

  trójkątną górną gdy $a_{ij} = 0$ dla $i > j$,

  trójkątną dolną gdy $a_{ij} = 0$ dla $i < j$.
- Macierzą jednostkową nazywamy macierz diagonalną, dla której dodatkowo $a_{ii} = 1$ czyli na głównej przekątnej stoją jedynki. Macierze jednostkowe oznaczamy I lub I_n gdy chcemy podać wymiar.
- Macierzą odwrotną do macierzy kwadratowej A nazywamy macierz A^{-1}, taką że $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$.

Własności działań na macierzach

Jeśli tylko wskazane działania można wykonać, to:

1. $(A + B) + C = A + (B + C)$
2. $A + B = B + A$
3. $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
4. $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$
5. $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$
6. $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$
7. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

Przykład: 4. Wyznaczyć macierze X, Y z równań:

- $A \cdot X + B = C$
- $Y \cdot D - E = Y \cdot F$.

Uwaga 7. Zbiór $\mathbf{M}_{n\times n}$ macierzy kwadratowych ustalonego wymiaru n z działaniami dodawania i mnożenia jest ważnym przykładem nieprzemiennego pierścienia z jedynką.

Rząd macierzy

Twierdzenie 10. *W dowolnej macierzy maksymalna ilość liniowo niezależnych wierszy jest równa maksymalnej ilości liniowo niezależnych kolumn.*

Def. 10. Rzędem macierzy A nazywamy maksymalną liczbę jej liniowo niezależnych wierszy (lub kolumn). Rząd macierzy A oznaczamy rA.

Twierdzenie 11. *Rząd macierzy A nie zmieni się gdy:*

1. *dowolny wiersz pomnożymy przez liczbę różną od zera,*
2. *dowolnie zmienimy kolejność wierszy,*
3. *do dowolnego wiersza dodamy kombinację liniową pozostałych,*
4. *wykreślimy wiersz złożony z samych zer,*
5. *przetransponujemy macierz,*
6. *wykonamy jakąkolwiek z operacji 1.2.3.4. na kolumnach.*

Rząd macierzy schodkowej

Przykład: 5. $r\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 3. \qquad r\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 4.$

Def. 11. Macierzą *schodkową* nazywamy macierz, której pierwsze niezerowe elementy kolejnych niezerowych wierszy znajdują się w coraz dalszych kolumnach, a wiersze zerowe umieszczone są najniżej.

Twierdzenie 12. *Rząd macierzy schodkowej jest równy ilości niezerowych wierszy (czyli ilości schodków).*

Uwaga 8. Pierwsze niezerowe elementy każdego wiersza nazywamy elementami *głównymi* (*wiodącymi*). Wygodnie, gdy są jedynkami, wtedy rząd macierzy jest równy ilości głównych jedynek.

Wyznaczanie rzędu macierzy metodą eliminacji Gaussa

Dowolną macierz sprowadzamy do postaci podanej w twierdzeniu za pomocą operacji, które nie zmieniają rzędu:

1. Jako pierwszy ustawiamy wiersz, który najwcześniej ma niezerowy wyraz,
2. jedynkę główną dostajemy dzieląc wiersz przez pierwszy niezerowy wyraz,
3. zera pod jedynką główną dostajemy odejmując odpowiednie kombinacje wiersza z jedynką główną od wierszy znajdujących się niżej,
4. opisaną operację powtarzamy dla kolejnych wierszy, aż do uzykania postaci schodkowej macierzy.

Przykład: 6. Wyznaczyć rzędy danych macierzy: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & -4 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 7 & 4 \end{bmatrix}$.

Uwagi do eliminacji Gaussa

1. Jedynkę główną można też niekiedy uzyskać zamieniając wiersze miejscami.

2. Pojawiające się wiersze zerowe można wykreślać i nie pisać ich w następnych krokach.

3. Łatwo zauważyć liniową zależność dwóch wierszy, ponieważ są one proporcjonalne. Na każdym etapie jeden z takich wierszy można wykreślić. Zostawiamy oczywiście ten drugi!

4. Jeśli zauważymy, że wyrazy stojące pod pierwszym niezerowym wyrazem pierwszego wiersza dzielą się przez ten wyraz, to nie trzeba zamieniać go w jedynkę główną.

Przykład: 7. Sprawdzić, czy wektory $[1, 1, 1]$, $[1, 2, 3]$ i $[2, 4, 8]$ są bazą przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

Uwaga 9. Rząd $(m \times n)$-macierzy jest równy wymiarowi podprzestrzeni generowanej przez jej wiersze w $\mathbb{R}^n$ i wymiarowi podprzestrzeni generowanej przez jej kolumny w $\mathbb{R}^m$.