Literatura

- J. Kosiorek, Skróty wykładów i listy zadań. Strona internetowa http://wmii.uwm.edu.pl/ kosiorek/Informatyka ISI/;
- J. Rutkowski, *Algebra liniowa w zadaniach*;
- J. Topp, *Algebra liniowa*;
- T. Jurlewicz, Z. Skoczylas, *Algebra liniowa 1/2*;

  Definicje, twierdzenia, wzory

  Przykłady i zadania;
- B. Gleichgewicht *Algebra*;
- A. Białynicki – Birula, *Algebra liniowa z geometrią*;
- W. Stankiewicz, J.Wojtowicz *Zadania z matematyki dla wyższych uczelni technicznych*, część I (II);
- A. Mostowski, M. Stark, *Elementy algebry wyższej*.

Grupa

Def. 1. *Grupą* nazywamy zbiór G z działaniem $\circ$, gdy spełnione są warunki:

1. Działanie $\circ$ jest *łączne* tzn. $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ dla dowolnych $a, b, c \in G$;
2. Istnieje *element neutralny* e działania $\circ$, czyli taki, że $a \circ e = e \circ a = a$ dla dowolnego $a \in G$;
3. Dla dowolnego $a \in G$ istnieje *element odwrotny* $a' \in G$, czyli taki, że $a \circ a' = a' \circ a = e$, gdzie e jest elementem neutralnym.

Mówimy, że grupa jest *abelowa* (*przemienna*), gdy $a \circ b = b \circ a$ dla dowolnych $a, b \in G$, (czyli jej działanie jest przemienne).

Podgrupa

Def. 2. Dowolny podzbiór grupy G, który jest grupą ze względu na to samo działanie nazywamy *podgrupą*.

Twierdzenie 1. *Dowolny podzbiór H grupy G jest podgrupą $\Leftrightarrow$ $H \neq \emptyset$ oraz dla dowolnych $a, b \in H$ do H należą również a^{-1} i $a \circ b$.*

Przykłady

- Liczby całkowite $\mathbb{Z}$ z działaniem dodawania i elementem neutralnym 0 są grupą.
- Liczby całkowite $\mathbb{Z}$ z działaniem mnożenia i elementem neutralnym 1 nie są grupą.
- Liczby naturalne $\mathbb{N}$ nie są grupą ani z działaniem dodawania, ani z działaniem mnożenia.
- Liczy parzyste są podgrupą grupy liczb całkowitych.
- Liczby nieparzyste nie są podgrupą grupy liczb całkowitych.
- Liczby rzeczywiste $\mathbb{R}$ i liczby wymierne $\mathbb{Q}$ z działaniem dodawania i elementem neutralnym 0 są grupami.
- Zbiory $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ i $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ z działaniem mnożenia i elementem neutralnym 1 są grupami.
- Grupy $(\mathbb{Z}, +)$ i $(\mathbb{Q}, +)$ są podgrupami grupy $(\mathbb{R}, +)$.
- Grupa $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ jest podgrupą grupy $(\mathbb{R}^*, \cdot)$.

Ciało i pierścień

Def. 3. *Ciałem* nazywamy zbiór F z działaniami dodawania i mnożenia oraz wyróżnionymi elementami $0, 1 \in F$, gdy spełnione są warunki:

1. F z działaniem dodawania i elementem neutralnym 0 jest grupą abelową;
2. $F \setminus \{0\}$ z działaniem mnożenia i elementem neutralnym 1 jest grupą abelową;
3. Mnożenie jest rozdzielne względem dodawania, tzn. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Uwaga 1. Jeżeli zamiast drugiego warunku założymy tylko łączność mnożenia i dołączymy prawostronną rozdzielność $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ to otrzymamy definicję *pierścienia*. Wyróżniamy też *pierścienie przemienne*, gdy mnożenie jest przemienne i pierścienie z jedynką, gdy mnożenie ma element neutralny.

Przykłady

- Prawa łączności, rozdzielności i przemienności są spełnione we wszystkich znanych ze szkoły zbiorach liczbowych $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ (liczbach naturalnych, całkowitych, wymiernych i rzeczywistych).
- Liczby całkowite są przemiennym pierścieniem z jedynką.
- Liczby wymierne i rzeczywiste są ciałami.

- Liczby wymierne są *podciałem* ciała liczb rzeczywistych (podciało definiuje się analogicznie do podgrupy).
- Przykłady grup i pierścieni nieprzemiennych pojawią się na dalszych wykładach.

Ciało liczb zespolonych

Def. 4. Ciałem liczb zespolonych $\mathbb{C}$ nazywamy zbiór uporządkowanych par liczb rzeczywistych z następującymi działaniami dodawania i mnożenia:

$$(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d),$$

$$(a, b) \cdot (c, d) := (ac - bd, ad + bc).$$

Postać algebraiczna:

$$z = x + yi$$

$x = \mathrm{Re}z$ - część rzeczywista, $y = \mathrm{Im}z$ - część urojona. Liczby w postaci algebraicznej mnożymy tak samo jak wyrażenia algebraiczne uwzględniając równość:

$$i^2 = -1$$

Def. 5. Sprzężeniem liczby zespolonej $z = x + yi$ nazywamy liczbę zespoloną:

$$\overline{z} = x - yi.$$

Reguła dzielenia: Licznik i mianownik mnożymy przez sprzężenie mianownika. **Własności sprzężenia**:

1. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
2. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
3. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{(\overline{z_1})}{(\overline{z_2})}$
4. $\overline{z^n} = \overline{z}^n$
5. $\overline{z} = z \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$
6. $z \cdot \overline{z} \in \mathbb{R}$

Twierdzenie 2. *Jeżeli liczba zespolona z jest pierwiastkiem wielomianu o współczynnikach rzeczywistych, to liczba $\overline{z}$ również.*

Twierdzenie 3 (Zasadnicze twierdzenie algebry)**.** *Każdy zespolony wielomian stopnia $n \geq 1$ ma pierwiastek w ciele liczb zespolonych $\mathbb{C}$.*

Wn. 1. *Każdy zespolony wielomian stopnia $n \geq 1$ rozkłada się na czynniki liniowe.*

Moduł i argument liczby zespolonej

Def. 6. Modułem liczby zespolonej $z = x + yi$ nazywamy liczbę rzeczywistą:

$$|z| := \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Argumentem liczby z nazywamy dowolny kąt φ, taki że

$$\cos\varphi = \frac{x}{|z|}, \qquad \sin\varphi = \frac{y}{|z|}.$$

Piszemy $argz$. Dokładnie jeden argument danej liczby jest zawarty w przedziale $[0, 2\pi)$. Nazywamy go argumentem głównym i oznaczamy $\mathrm{Arg}z$. **Interpretacja geometryczna:** Argument jest kątem pomiędzy dodatnią półosią rzeczywistą i promieniem wodzącym punktu reprezentującego daną liczbę, a moduł odległością tego punktu od początku układu współrzędnych.

Postać trygonometryczna liczby zespolonej

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

gdzie r jest modułem a φ argumentem liczby z.

Przykład: 1. 1. Zaznaczyć na płaszczyźnie zespolonej zbiór liczb spełniających warunki

$$\begin{cases} |z| \leq 2 \\ \frac{\pi}{4} \leq Argz \leq \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

2. Równanie $|z - z_0| = r$ opisuje okrąg o środku z_0 i promieniu r.

Ważne wzory trygonometryczne:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

Mnożenie liczb w postaci trygonometrycznej

$r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$
(Mnożąc liczby zespolone mnożymy ich moduły i dodajemy argumenty.)

Twierdzenie 4 (Wzory Moivre'a)**.** *Dla dowolnej liczby zespolonej $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ i liczby naturalnej n zachodzi:*

1. $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$,
2. *istnieje dokładnie n różnych pierwiastków $\sqrt[n]{z}$, które wyrażają się wzorem:*

$$z_k = \sqrt[n]{r}(\cos\tfrac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\tfrac{\varphi + 2k\pi}{n})$$

dla $k = 0, 1, 2, ..., n - 1$.

Postać wykładnicza liczby zespolonej:

$$e^{i\varphi} := \cos\varphi + isin\varphi$$

$e \approx 2,72$ jest liczbą niewymiarną, nazywaną liczbą Eulera. Wzory Moivre'a w postaci wykładniczej: Dla $z = re^{i\varphi}$

1. $z^n = r^n e^{in\varphi}$;

2. istnieje dokładnie n różnych pierwiastków $\sqrt[n]{z}$, które wyrażają się wzorem:

   $$z_k = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}}$$

   dla $k = 0, 1, 2, ..., n-1$.

Przykład: 2. Wielomian $W(x) = x^4 + 4$ rozłożyć na czynniki stopnia 2.

Działania modulo n i ciała skończone Z_p

Dla dowolnej liczby naturalnej n bierzemy zbiór $Z_n = \{0, 1, ..., n-1\}$ i określamy w nim następujące działania dodawania i mnożenia:

$a \oplus_n b$ jest resztą z dzielenia $a + b$ przez n;

$a \odot_n b$ jest resztą z dzielenia $a \cdot b$ przez n.

Jeżeli n jest liczbą pierwszą, to Z_n z tak określonymi działaniami jest ciałem. $a \oplus_n b$ czytamy a plus b modulo n. Podobnie a razy b modulo n. Pisze się też

$$a + b = c \pmod{n} \quad \text{i} \quad a \cdot b = c \pmod{n}$$

zamiast $a \oplus_n b = c$ i $a \odot_n b = c$.

Uwaga 2. Jeżeli n jest liczbą złożoną, to Z_n jest pierścieniem przemiennym z jedynką. Różne od 1 dzielniki liczby n nie mają w pierścieniu Z_n elementów odwrotnych.