Lista zadań z geometrii afinicznej i rzutowej

1. Napisać równania prostych AB i CD, gdzie $A = [1:2:1]$, $B = [1:2:0]$, $C = [0:4:2]$, $D = [2:0:1]$, płaszczyzny rzutowej $P(\mathbb{R}^3)$ (modelu w przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^3$).

2. Wyznaczyć punkty wspólne ab i cd prostych o równaniach: $a: \ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$, $b: \ x_1 + 2x_2 = 0$, $c: \ 4x_2 + 2x_3 = 0$, $d: \ 2x_1 + x_3 = 0$ płaszczyzny rzutowej $P(\mathbb{R}^3)$.

3. Każdemu punktowi właściwemu (x, y) rzutowego rozszerzenia płaszczyzny euklidesowej $\mathbb{R}^2$ przyporządkowujemy punkt $[x : y : 1]$ modelu $P(\mathbb{R}^3)$. Rozszerzamy to przekształcenie na punkty niewłaściwe (m) i (∞) tak, aby otrzymać izomorfizm modeli. Wyznaczyć:
   a) Obrazy rozszerzeń prostych o równaniach $y = 2x + 1$ i $x = 2$ oraz prostej kierunków $(\{(m) : \ m \in \mathbb{R}\} \cup \{(\infty)\})$. b) Przeciwobrazy wszystkich puktów i prostych z pierwszych dwóch zadań.

4. Dla dowolnej płaszczyzny afinicznej rzędu n określić: a) ilość punktów, b) ilość prostych przechodzących przez ustalony punkt, c) ilość prostych równoległych do ustalonej prostej, d) ilość wszystkich prostych.

5. Dla dowolnej płaszczyzny rzutowej rzędu n określić: a) ilość punktów, b) ilość prostych, c) ilość prostych przechodzących przez ustalony punkt.

6. Ile kolineacji ma afiniczna płaszczyzna Fano?

7. Wykazać, że każda translacja afinicznej płaszczyzny Fano jest inwolucją. Ile ich jest?

8. Wykazać, że każda jednokładność afinicznej płaszczyzny Fano jest identycznością.

9. Wykazać, że każda jednokładność afinicznej płaszczyzny rzędu 3 jest inwolucją. Ile ich jest? Ile jest translacji tej płaszczyzny? Czy są inwolucyjne translacje tej płaszczyzny.

10. Ile jest wszystkich kolineacji afinicznej płaszczyzny rzędu 3? Wskazówka: każde przekształcenie afniczne jest jednoznacznie wyznaczone przez obraz trójkąta.

11. Wyznaczyć kolineację rzeczywistej płaszczyzny afinicznej przeprowadzającej punkty $(0,0), (1,0), (0,1)$ odpowiednio na $(2,3), (4,4), (3,1)$.

12. Na rzeczywistej płaszczyźnie afinicznej opisać analitycznie grupę wszystkich: a) translacji o kierunku prostej $y = 2x$, b) Jednokładności o środku $(1,1)$, c) ścięć o osi Ox, d) powinowactw o osi Ox i kierunku Oy. Sprawdzić, że są one liniowo tranzytywne.

13. Podać analityczną postać ścięcia o osi $y = x$ przeprowadzającego $(0,1)$ na $(1,2)$ oraz powinowactwa o tej samej osi przeprowadzającego $(0,1)$ na $(0,3)$.

14. Opisać analitycznie grupę wszystkich ścięć o osi $y = x$ i uzasadnić, że jest ona liniowo tranzytywna.

15. Opisać analitycznie grupę wszystkich powinowactw o osi $y = x$ i kierunku Oy.

16. Sklasyfikować przekształcenia: a) $(x,y) \mapsto (y, -x+2y)$; b) $(x,y) \mapsto (3x+2y, -x)$; c) $(x,y) \mapsto (2x+2, 2y-3)$.

17. Uzasadnić, że

   a) Prosta AB, gdzie $A = [a_1 : a_2 : a_3]$ i $B = [b_1 : b_2 : b_3]$ $(A \neq B)$ ma równanie $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$

   b) Punkt wspólny prostych o równaniach $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$ i $b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3$ jest generowany przez wektor $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$.

18. Prostą AB, gdzie $A = [1:2:1]$, $B = [2:1:1]$ przeciąć z prostą o równaniu $2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0$.

19. Z pęku wyznaczonego przez proste o równaniach $x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$ i $2x_1 + x_2 + x_3 = 0$ rzeczywistej płaszczyzny rzutowej $\mathfrak{P}(\mathbb{R})$ wybrać prostą incydującą z punktem $[2:3:1]$.

20. Dla płaszczyzny $\mathfrak{P}(\mathbb{Z}_3)$ wyznaczyć:

   a) wszystkie proste incydujące z punktem $[1:0:2]$,

b) wszystkie punkty incydujące z prostą $2x_1 + x_2 + x_3 = 0$,

c) pozostałe punkty prostej wyznaczonej przez punkty $[0 : 0 : 1]$ i $[1 : 2 : 1]$ oraz równanie tej prostej,

d) pozostałe proste i wierzchołek pęku wyznaczonego przez proste $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ i $x_1 + x_3 = 0$.

21. Wskazać przykład elacji płaszczyzny rzutowej rzędu 2. Ile jest takich elacji? Wykazać, że każda elacja tej płaszczyzny jest inwolucją a homologia – identycznością.

22. Ile jest wszystkich kolineacji płaszczyzny rzutowej rzędu 2? Wskazówka: każda jest wyznaczona jednoznacznie przez obraz czworokąta.

23. Wykazać, że każda homologia płaszczyzny rzutowej rzędu 3 jest inwolucją lub identycznością, natomiast płaszczyzna ta nie ma inwolucyjnych elacji. Ile homologii i ile elacji ma ta płaszczyzna?

24. Dowolny automorfizm liniowy $X \mapsto AX$ przestrzeni F^3 indukuję kolineację płaszczyzny rzutowej $\mathfrak{P}(F)$. Niech $B = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ będzie macierzą współczynników prostej o równaniu $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$. Wykazać, że macierz współczynników obrazu tej prostej jest (z dokładnością do proporcjonalności) równa $(A^{-1})^T B$.

25. Wyznaczyć obrazy prostych $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$ i $x_1 - x_2 = 0$ w kolineacji płaszczyzny $\mathfrak{P}(\mathbb{R})$ indukowanej przez automorfizm liniowy o macierzy $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

26. Wyznaczyć macierz kolineacji rzutowej przeprowadzającej punkty $[1 : 0 : 0], [0 : 1 : 0], [0 : 0 : 1], [1 : 1 : 1]$ odpowiednio na punkty:

a) $[1 : 0 : 0], [0 : 1 : 0], [0 : 0 : 1], [a : b : c]$ gdzie $a, b, c \neq 0$. Jaki jest geometryczny sens warunku $a, b, c \neq 0$?

b) $[1 : 1 : 0], [1 : 0 : 1], [1 : 2 : 1], [1 : 1 : 2]$.

27. Wykazać, że kolineacja płaszczyzny $\mathfrak{P}(\mathbb{R})$ o macierzy $(a_{ij})_{3\times 3}$ indukuje kolineację płaszczyzny afinicznej (o zbiorze punktów $\{[x_1 : x_2 : x_3] |\ x_3 \neq 0\}$) wtedy i tylko wtedy, gdy $a_{31} = a_{32} = 0$.

28. Sprawdzić, że kolineacje $\mathfrak{P}(\mathbb{R})$ o macierzach $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ gdzie $k \neq 0$ są, odpowiednio, homologią i elacją. Wyznaczyć ich środki i osie.

29. Wyznaczyć punkty stałe kolineacji o danych macierzach. W przypadku homologii i elacji wyznaczyć ich środki i osie.
a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; e) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

30. Znaleźć obrazy stożkowej o równaniu $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ w kolineacjach rzutowych indukowanych przez automorfizmy liniowe o macierzach $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Wyznaczyć punkty niewłaściwe otrzymanych krzywych oraz równania zbiorów ich punktów właściwych.

31. Wyznaczyć homografię $\varphi \in PGL(2, \mathbb{R})$ przeprowadzającą punkty p, q, r prostej rzutowej $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ odpowiednio na $0, 1, \infty$. Podać jej przedstawienie we współrzędnych jednorodnych.

32. Wyznaczyć homografię $\psi \in PSL(2, \mathbb{R})$, która przeprowadza p, r odpowiednio na $0, \infty$.

33. Wyznaczyć inwolucyjną homografię o punktach stałych: (a) $0, \infty$; (b) p, q.