

Lista zadań z geometrii nieeuklidesowych nr 1

Zadania wstępne o inwersjach, euklidesowych symetriach osiowych i homografiach

- Wykazać, że składaniu homografii odpowiada mnożenie ich macierzy. Dokładniej: złożenie $\psi \circ \varphi$ homografii $\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ z homografią $\psi(z) = \frac{ez+f}{gz+h}$ jest homografią o współczynnikach, które są wyrazami macierzy $\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Uogólnić na złożenia antygrafii i homografii przy założeniu, że współczynniki przekształceń są rzeczywiste.
- Wykazać, że homografia $\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ jest inwolucją wtedy i tylko wtedy, gdy $a = -d$.
- Dane są punkty $O = 0$ i $P = 2$ oraz proste $a : x = 0$ i $b : x = 1$. Wyznaczyć wzory analityczne postaci $\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ następujących złożów przekształceń:
(a) $S_a S_{O,1}$; (b) $S_{O,1} S_a$; (c) $S_b S_{P,2}$; (d) $S_{P,2} S_b$; (e) $S_{O,1} S_{P,2}$; (f) $S_{P,2} S_{O,1}$; (g) $(S_{P,2} S_{O,1})^2$.
- Wyznaczyć złożenie $\varphi \circ \psi \circ \varphi$ dla $\varphi(z) = \bar{z} + 2i$, $\psi(z) = \frac{1}{\bar{z}}$. Jakim przekształceniem jest $S_l \circ S_{O,r} \circ S_l$ dla dowolnych l, O, r ?
- Wyznaczyć złożenie $\varphi \circ \psi \circ \varphi$ dla $\varphi(z) = \frac{4}{\bar{z}}$, $\psi(z) = -\bar{z} - 4$. Jakim przekształceniem jest $S_{O,r} \circ S_l \circ S_{O,r}$ dla dowolnych l, O, r , gdy $O \notin l$?

Model Poincare'go w półpłaszczyźnie

- Narysować trójkąt ABC o wierzchołkach $A = 2i$, $B = 4i$, $C = 2 + 2i$ i znaleźć:
(a) Równania prostych jego boków.
(b) Wzory analityczne symetrii względem boków trójkąta.
(c) Miary jego kątów wewnętrznych. Czy trójkąt ten jest prostokątny lub równoramienny?
(d) Długości boków.
(e) Trzy różne trójkąty przystające do ABC .
- Wyznaczyć obrazy punktu $P = 3 + 3i$ w symetriach względem prostych:
- (a) $l : x = 2$; (b) $k : |z| = 2$.
- Wyznaczyć symetralne i środki odcinków o danych końcach:
(a) $A = i$, $B = 4i$; (b) $C = -2 + 2i$, $D = 2 + 2i$; (c) $E = 3i$, $F = 2 + i$.
- Wyznaczyć rzuty prostokątne danych punktów na dane proste:
(a) $P = 3i$ na $l : x = 4$; (b) $Q = 4i$ i $R = 4 + 4i$ na $l : |z| = 2$.
- Poprowadzić przez punkty z poprzedniego zadania proste równoległe do danych prostych i wyznaczyć kąty równoległości.
- Wyznaczyć obraz punktu $P = 3 + 4i$ w symetrii względem punktu $O = 4i$.
- Wyznaczyć wzór ogólny symetrii S_O względem punktu $O = a + bi$.

14. Dane są proste $b : x = 0$, $a_1 : |z| = 1$, $a_2 : |z - 1| = 1$; $a_3 : |z - 3| = 1$.
 - (a) Dla każdej z prostych a_i znaleźć taką prostą l , że $S_l(a_i) = b$.
 - (b) Wyznaczyć wzory analityczne znalezionych symetrii osiowych.
 - (c) Zamiast symetrii znaleźć analogiczne izometrie parzyste.
 - (d) W którym przypadku proste są nadrównoległe? Znaleźć ich wspólną prostopadłą.
15. Wyznaczyć wspólną prostopadłą prostych nadrównoległych $a : |z| = 1$ i $b : |z - 4| = 2$
16. Wyznaczyć równanie prostej zagrządzającej kąta $\angle ABC$, gdzie $A = -1 + 4i$, $B = 3i$, $C = 1 + 4i$ oraz odległość wierzchołka B od prostej zagrządzającej.
17. Sprawdzić, czy trójkąty asymptotyczne i , $i\sqrt{3}$, (1) i $2 + 2i$, $3 + i\sqrt{3}$, (∞) są przystające. (∞) oznacza wspólny koniec prostych pionowych.
18. Wskazać izometrię przeprowadzającą potrójnie asymptotyczny trójkąt $(-2)(0)(2)$ na $(3)(4)(\infty)$.
19. Wyznaczyć prostą, która jest jednocześnie równoległa do prostej $l : |z + 1| = 1$ i prostopadła do prostej $k : |z - 2| = 1$.
20. Wykazać, że hiperboliczny okrąg w modelu Poincare'go jest pewnym okręgiem euklidesowym.
21. Wyznaczyć hiperboliczny środek okręgu o równaniu $|z - 5i| = 2$.
22. Napisać równanie hiperbolicznego okręgu o średnicy AB , gdzie $A = 1 + i$ i $B = -2 + 4i$.
23. Dane są punkty $A = i$, $B = 2i$, $C = -1 + i$, $D = 3 + i$. Zbadać wzajemne położenie symetralnych boków trójkątów: (a) ABC ; (b) ABD ; (c) ACD .
24. Wyznaczyć pola trójkątów z zadania 23.
25. Wykazać, że w modelu Poincare'go w półpłaszczyźnie ekwidystanta jest sumą dwóch półprostych o wspólnym początku na absolutie u lub sumą łuków dwóch okręgów o wspólnych końcach na absolutie.
26. Wykazać, że w modelu Poincare'go w półpłaszczyźnie horocykl jest prostą poziomą lub okręgiem stycznym do absolutu.
27. Dla każdego z trójkątów z zadania 23 wyznaczyć równanie opisanego na nim okręgu, horocyklu lub ekwidystanty.
28. Sklasyfikować homografie modelu Poincare'go w półpłaszczyźnie jako izometrie geometrii hiperbolicznej za pomocą położenia ich punktów stałych (z uwzględnieniem punktów niewłaściwych modelu).
29. Sklasyfikować dane homografie i każdą z nich przedstawić jako złożenie pewnych hiperbolicznych symetrii osiowych: (a) $\varphi(z) = 2z - 2$; (b) $\varphi(z) = z + 4$; (c) $\varphi(z) = \frac{z + 2}{z + 3}$; (d) $\varphi(z) = \frac{z - 4}{z - 1}$; (e) $\varphi(z) = \frac{z - 5}{z - 3}$; (f) $\varphi(z) = \frac{z - 1}{z + 3}$.
30. Każdą z danych symetrii z poślizgiem przedstawić w postaci złożenia symetrii względem jej osi z translacją hiperboliczną: (a) $\psi(z) = -2\bar{z}$; (b) $\psi(z) = \frac{\bar{z} + 4}{\bar{z} + 1}$; (c) $\psi(z) = \frac{2\bar{z}}{\bar{z} - 2}$.
31. Wykazać, że antygrafia $\psi(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}$ modelu Poincare'go w półpłaszczyźnie jest hiperboliczną symetrią osiową wtedy i tylko wtedy, gdy $a = -d$. Wyznaczyć równanie jej osi.