Lista zadań z geometrii nieeuklidesowych nr 1

Zadania wstępne o inwersjach i euklidesowych symetriach osiowych

1. Wyznaczyć obrazy w inwersji $\mathbf{S}_{(0),4}$ (o środku (0) i promieniu 4) okręgów i prostej o danych równaniach:

   (a) $|z| = 8$; (b) $|z - 5| = 3$; (c) $|z - 1| = 1$; (d) $|z - 4| = 4$; (e) $|z| = |z - 4|$.

2. Wyznaczyć równanie okręgu przechodzącego przez punkty $A = (2 + 2i)$, $B = (4 + 2i)$ i ortogonalnego do okręgu $|z| = 2$.

3. Skonstruować okrąg ortogonalny do okręgów $|z| = 2$, $|z - 5| = 3$ przechodzący przez punkt $P = (2 + 3i)$.

4. Wyznaczyć promień inwersji o środku $O = (0)$, w której okrąg $|z - 5| = 2$ jest niezmienniczy.

5. Wyznaczyć wzór inwersji przeprowadzającej okrąg $|z| = 1$ w

   (a) prostą $x = 4$; (b) okrąg $|z - 3| = 2$.

6. Dane są punkty $O = (0)$ i $P = (2)$ oraz proste $a: \ x = 0$ i $b: \ x = 1$. Wyznaczyć wzory analityczne postaci $\varphi(z) = \dfrac{az + b}{cz + d}$ następujących złożeń przekształceń:

   (a) $\mathbf{S}_a\mathbf{S}_{O,1}$; (b) $\mathbf{S}_{O,1}\mathbf{S}_a$; (c) $\mathbf{S}_b\mathbf{S}_{P,2}$; (d) $\mathbf{S}_{P,2}\mathbf{S}_b$; (e) $\mathbf{S}_{O,1}\mathbf{S}_{P,2}$; (f) $\mathbf{S}_{P,2}\mathbf{S}_{O,1}$; (g) $(\mathbf{S}_{P,2}\mathbf{S}_{O,1})^2$.

7. Wyznaczyć złożenie $\varphi \circ \psi \circ \varphi$ dla $\varphi(z) = \overline{z} + 2i$, $\psi(z) = \dfrac{1}{\overline{z}}$. Jakim przekształceniem jest $\mathbf{S}_l \circ \mathbf{S}_{O,r} \circ \mathbf{S}_l$ dla dowolnych l, O, r?.

8. Wyznaczyć złożenie $\varphi \circ \psi \circ \varphi$ dla $\varphi(z) = \dfrac{4}{\overline{z}}$, $\psi(z) = -\overline{z} - 4$. Jakim przekształceniem jest $\mathbf{S}_{O,r} \circ \mathbf{S}_l \circ \mathbf{S}_{O,r}$ dla dowolnych l, O, r, gdy $O \notin l$?

Model Poincare'go w półpłaszczyźnie

9. Narysować trójkąt ABC o wierzchołkach $A = 2i$, $B = 4i$, $C = 2 + 2i$ i znaleźć:

   (a) Równania prostych jego boków.
   (b) Wzory analityczne symetrii względem boków trójkąta.
   (c) Miary jego kątów wewnętrznych. Czy trójkąt ten jest prostokątny lub równoramienny?
   (d) Długości boków.
   (e) Trzy różne trójkąty przystające do ABC.

10. Wyznaczyć obrazy punktu $P = 3 + 3i$ w symetriach względem prostych:

11. (a) $l: \ x = 2$; (b) $k: |z| = 2$.

12. Wyznaczyć symetralne i środki odcinków o danych końcach:

    (a) $A = i$, $B = 4i$; (b) $C = -2 + 2i$, $D = 2 + 2i$; (c) $E = 3i$, $F = 2 + i$.

13. Wyznaczyć rzuty prostokątne danych punktów na dane proste:

    (a) $P = 3i$ na $l: \ x = 4$; (b) $Q = 4i$ i $R = 4 + 4i$ na $l: \ |z| = 2$.

14. Poprowadzić przez punkty z poprzedniego zadania proste równoległe do danych prostych i wyznaczyć kąty równoległości.

15. Wyznaczyć obraz punktu $P = 3 + 4i$ w symetrii względem punktu $O = 4i$.

16. Wyznaczyć wzór ogólny symetrii $\mathbf{S}_O$ względem punktu $O = a + bi$.

17. Dane są proste $b : x = 0$, $a_1 : |z| = 1$, $a_2 : |z-1| = 1$; $a_3 : |z-3| = 1$.
    (a) Dla każdej z prostych a_i znaleźć taką prostą l, że $\mathbf{S}_l(a_i) = b$.
    (b) Wyznaczyć wzory analityczne znalezionych symetrii osiowych.
    (c) Zamiast symetrii znaleźć analogiczne izometrie parzyste.
    (d) W którym przypadku proste są nadrównoległe? Znaleźć ich wspólną prostopadłą.
18. Wyznaczyć wspólną prostopadłą prostych nadrównoległych $a : |z| = 1$ i $b : |z-4| = 2$
19. Wyznaczyć równanie prostej zagradzającej kąta $\angle ABC$, gdzie $A = -1+4i$, $B = 3i$, $C = 1+4i$ oraz odległość wierzchołka B od prostej zagradzającej.
20. Sprawdzić, czy trójkąty asymptotyczne i, $i\sqrt{3}$, (1) i $2+2i$, $3+i\sqrt{3}$, (∞) są przystające. (∞) oznacza wspólny koniec prostych pionowych.
21. Wskazać izometrię przeprowadzającą potrójnie asymptotyczny trójkąt $(-2)(0)(2)$ na $(3)(4)(\infty)$.
22. Wyznaczyć prostą, która jest jednocześnie równoległa do prostej $l : |z+1| = 1$ i prostopadła do prostej $k : |z-2| = 1$.
23. Wykazać, że hiperboliczny okrąg w modelu Poincare'go jest pewnym okręgiem euklidesowym.
24. Wyznaczyć hiperboliczny środek okręgu o równaniu $|z-5i| = 2$.
25. Napisać równanie hiperbolicznego okręgu o średnicy AB, gdzie $A = 1+i$ i $B = -2+4i$.
26. Dane są punkty $A = i$, $B = 2i$, $C = 1-i$, $D = 3+i$. Zbadać wzajemne położenie symetralnych boków trójkątów: (a) ABC; (b) ABD; (c) ACD.
27. Wykazać, że w modelu Poincare'go w półpłaszczyźnie ekwidystanta jest sumą dwóch półprostych o wspólnym początku na absolucie u lub sumą łuków dwóch okręgów o wspólnych końcach na absolucie.
28. Wykazać, że w modelu Poincare'go w półpłaszczyźnie horocykl jest prostą poziomą lub okręgiem stycznym do absolutu.
29. Dla każdego z trójkątów z zadania 26 wyznaczyć równanie opisanego na nim okręgu, horocyklu lub ekwidystanty.
30. Sklasyfikować ogólne wszystkie homografie modelu Poincare'go w półpłaszczyźnie jako izometrie geometrii hiperbolicznej. Wskazówka: wykorzystać położenie punktów stałych homografii z uwzględnieniem punktów niewłaściwych modelu.
31. Sklasyfikować dane homografie i każdą z nich przedstawić jako złożenie pewnych hiperbolicznych symetrii osiowych: (a) $\varphi(z) = 2z-2$; (b) $\varphi(z) = z+4$; (c) $\varphi(z) = \dfrac{z+2}{z+3}$; (d) $\varphi(z) = \dfrac{z-4}{z-1}$; (e) $\varphi(z) = \dfrac{z-5}{z-3}$; (f) $\varphi(z) = \dfrac{z-1}{z+3}$.
32. Każdą z danych symetrii z poślizgiem przedstawić w postaci złożenia symetrii względem jej osi z translacją hiperboliczną: (a) $\psi(z) = -2\overline{z}$; (b) $\psi(z) = \dfrac{\overline{z}+4}{\overline{z}+1}$; (c) $\psi(z) = \dfrac{2\overline{z}}{\overline{z}-2}$.
33. Wykazać, że antygrafia $\psi(z) = \dfrac{a\overline{z}+b}{c\overline{z}+d}$ modelu Poincare'go w półpłaszczyźnie jest hiperboliczną symetrią osiową wtedy i tylko wtedy, gdy $a = -d$. Wyznaczyć równanie jej osi.