Stosunek anharmoniczny

Definicja 1. *Stosunkiem anharmonicznym* (*dwustosunkiem*) czterech różnych punktów A, B, C, D prostej rzutowej nad dowolnym ciałem o współrzędnych niejednorodnych a, b, c, d nazywamy liczbę

$$(AB; CD) = (ab; cd) := \frac{a-c}{b-c} : \frac{a-d}{b-d},$$

gdy jeden z punktów ma współrzędną ∞ przyjmujemy

$$(\infty b; cd) := \frac{b-d}{b-c} \quad (= \lim_{x\to\infty} (xb; cd))$$

i analogicznie, gdy punkt (∞) pojawi się w dowolnym innym miejscu czwórki. W tym przypadku stosunek anharmoniczny jest przeciwny do zorientowanego stosunku podziału odcinka (DC przez punkt B).

Stosunek anharmoniczny we współrzędnych jednorodnych

Dla punktów $A = [a_1, a_2]$, $B = [b_1, b_2]$, $C = [c_1, c_2]$, $D = [d_1, d_2]$ stosunek anharmoniczny wyraża się wzorem:

$$(AB; CD) = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix}}.$$

Twierdzenie 1. *Stosunek anharmoniczny jest niezmiennikiem przekształceń rzutowych.*

Twierdzenie 2. *Stosunek podziału odcinka jest niezmiennikiem przekształceń afinicznych.*

Wn. 1. *Grupa przekształceń afinicznych prostej pokrywa się z grupą jej podobieństw.*

Definicja 2. Mówimy, że punkty A, B, C, D tworzą *czwórkę harmoniczną*, co oznaczamy $H(AB; CD)$, gdy $(AB; CD) = -1$. Mówimy też wtedy, że A, B są *harmonicznie sprzężone* względem C, D

Uwaga 1. $H(AB; CD) \Leftrightarrow H(AB; DC) \Leftrightarrow H(CD; AB)$.

Uwaga 2. Środek odcinka jest harmonicznie sprzężony z punktem w nieskończoności względem jego końców.

Twierdzenie 3. *Homologia φ o osi l i środku O jest inwolucją wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego X. który nie jest jej punktem stałym zachodzi $H(OL; X\varphi(X))$, gdzie $L := l(OX)$.*

Dlatego inwolucyjne homologie nazywamy również homologiami *harmonicznymi.*

Model Kleina geometrii hiperbolicznej

- Zbiór punktów - wnętrze koła (stożkowej), okrąg ograniczający koło nazywamy *absolutem*;
- Proste - otwarte odcinki cięciw;
- Grupa przekształceń (izometrie) - przekształcenia rzutowe płaszczyzny zachowujące koło.

  Grupa ta generowana jest przez homologie harmoniczne (czyli inwolucyjne) zachowujące stożkową, które są hiperbolicznymi symetriami osiowymi.
- W modelu Kleina długość odcinka wyraża się wzorem:

  $$|AB|_h := \frac{1}{2}|\ln(PQ;AB)| = \frac{1}{2}\Big|\ln\Big(\frac{|PA|}{|PB|} : \frac{|QA|}{|QB|}\Big)\Big|$$

  gdzie P, Q są końcami prostej $l(A,B)$ a $(PQ;AB)$ jest stosunkiem anharmonicznym.