## Kolineacje płaszczyzn rzutowych

**Def. 1.** Kolineację, która ma prostą punktów stałych $g$ i pęk niezmienniczych prostych przechodzących przez punkt $P$ nazywamy kolineacją *środkowo-osiową* lub *perspektywiczną*. Prostą $g$ nazywamy jej osią, a punkt $P$ środkiem.

**Twierdzenie 1.** *Kolineacja ma środek wtedy i tylko wtedy, gdy ma oś.*

**Def. 2.** W przypadku gdy środek incyduje z osią kolineację nazywamy *elacją*, a w przeciwnym przypadku *homologią*.

**Def. 3.** Zbiór wszystkich kolineacji o ustalonych; środku $P$ i osi $g$ jest grupą, którą oznaczamy $\Pi(g, P)$. Mówimy, że grupa ta jest *liniowo tranzytywna* gdy dla dowolnej pary punktów $A, B \in \mathcal{P} \setminus (g \cup \{P\})$ istnieje $\pi \in \Pi(g, P)$, taka że $\pi(A) = B$ (mówimy też wtedy, że płaszczyzna $\mathfrak{P}$ jest $(g, P) - tranzytywna$.

**Def. 4.** Grupę generowaną przez kolineacje perspektywiczne nazywamy *grupą kolineacji rzutowych.*

**Twierdzenie 2.** *Dowolna kolineacja $\varphi$ płaszczyzny afinicznej $\mathfrak{A}$ wyznacza jednoznacznie kolineację $\overline{\varphi}$ jej rzutowego rozszerzenia $\overline{\mathfrak{A}}$, która zachowuje prostą $\mathcal{U}$ i odwrotnie każda kolineacje płaszczyzny rzutowej $\mathfrak{P}$, która zachowuje prostą $g_\infty$ wyznacza jednoznacznie pewną kolineację płaszczyzny afinicznej $\overline{\mathfrak{P}}$.*

**Wn. 1.** *Rzutowym rozszerzeniem jednokładności jest homologia o osi niewłaściwej, translacji - elacja o osi i środku niewłaściwych, powinowactwa o kierunku nierównoległym do osi - homologia o środku niewłaściwym, a ścięcia - elacja o środku niewłaściwym.*

**Wn. 2.** *Kolineacja płaszczyzny afinicznej z pękiem niezmienniczych prostych równoległych i bez punktów stałych jest translacją, a z pękiem niezmienniczych prostych przecinających się jest jednokładnością.*

## Postulaty Desargues'a i Pappusa dla płaszczyzn rzutowych

(D) : Dla dowolnych trzech trójek $Z, A, A'$; $Z, B, B'$; $Z, C, C'$ punktów trzech różnych prostych (przechodzących przez $Z$) punkty $D := (AB)(A'B')$, $E := (BC)(B'C')$ i $F := (AC)(A'C')$ są współliniowe.

(P): Dla dowolnego sześciokąta $P_1, Q_2, P_3, Q_1, P_2, Q_3$, którego trójki wierzchołków $P_1, P_2, P_3$ i $Q_1, Q_2, Q_3$ leżą odpowiednio na dwóch różnych prostych $g, h$, punkty $A := (P_1Q_2)(P_2Q_1)$, $B := (P_1Q_3)(P_3Q_1)$ i $C := (P_2Q_3)(P_3Q_2)$ są współliniowe.

*Uwaga* 1. Z (P) wynika (D).

**Twierdzenie 3.** *Płaszczyzna rzutowa jest dezargowa wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolne prostej $g$ i dowolnego punktu $P$ grupa $\Pi(g, P)$ jest liniowo tranzytywna.*

**Twierdzenie 4.** *Grupa przekształceń rzutowych płaszczyzny dezargowej działa tranzytywnie na zbiorze czworokątów.*

*Uwaga* 2. Ścisła tranzytywność grupy przekształceń rzutowych na zbiorze czworokątów jest równoważna postulatowi Pappusa. W szczególności zachodzi:

*Twierdzenie* 5 (Podstawowe twierdzenie geometrii rzutowej). *Przekształcenie rzutowe płaszczyzny pappusowej jest wyznaczone jednoznacznie przez podanie obrazu czworokąta.*

### Płaszczyzny rzutowe nad ciałami

**Twierdzenie 6.** *Niech* $(F,+,\cdot)$ *będzie ciałem,* $\mathcal{P} = F^2 \cup F \cup \{\infty\}$ *i* $\mathcal{G} = \{\{(x,y) \in \mathcal{P}|\ y = mx+b\} \cup \{(m)\}|\ m,b \in F\} \cup \{\{(x,y) \in \mathcal{P}|\ x = c\} \cup \{(\infty)\}|\ c \in F\} \cup \{\{(m)|m \in F\} \cup \{\infty\}\}$. *Wówczas struktura* $\overline{\mathfrak{A}(F)} = (\mathcal{P},\mathcal{G},\in)$ *jest płaszczyzną rzutową.*

*Uwaga* 3. Płaszczyzna rzutowa $\mathfrak{P}$ jest izomorficzna z $\overline{\mathfrak{A}(F)}$ wtedy i tylko wtedy gdy spełniony jest postulat Pappusa.

*Uwaga* 4. W przypadku płaszczyzn spełniających postulat Desargues'a otrzymujemy analogiczny opis $\overline{\mathfrak{A}(F)}$ przy zastrzeżeniu, że ciało $F$ może być skośne.

*Uwaga* 5. W obu przypadkach charakterystyka ciała jest równa 2 wtedy i tylko wtedy, gdy płaszczyzna zawiera rzutową konfigurację Fano.

### Współrzędne jednorodne

**Twierdzenie 7.** *Niech* $(F,+,\cdot)$ *będzie ciałem,* $F^3$ *– 3-wymiarową przestrzenią liniową nad* $F$, $\theta = (0,0,0)$ $\mathcal{P} := \{< (x_1,x_2,x_3) > |\theta \neq (x_1,x_2,x_3) \in K^3\}$ $\mathcal{G} := \{\{< (x_1,x_2,x_3) > \in \mathcal{P}|ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0\}|\theta \neq (a,b,c) \in F^3$. *Wówczas struktura* $\mathfrak{P}(F) := (\mathcal{P},\mathcal{G},\in)$ *jest płaszczyzną rzutową izomorficzną z płaszczyzną* $\overline{\mathfrak{A}(F)}$.

$\mathfrak{P}(F)$ nazywamy reprezentacją $\overline{\mathfrak{A}(F)}$ we współrzędnych jednorodnych. Izomorfizm otrzymujemy przyporządkowując prostą o równaniu $x_3 = 0$ prostej w nieskończoności $(\{(m)|m \in F \cup \{\infty\})$. Wówczas płaszczyźnie afinicznej $\mathfrak{A}(F)$ odpowiada struktura $(\mathcal{P}',\mathcal{G}',\in)$, gdzie: $\mathcal{P}' := \{< (x,y,1) > |x,y \in F\}$, $\mathcal{G}' := \{\{< (x,y,1) > \in \mathcal{P}|ax + by + c = 0\}|(0,0) \neq (a,b) \in F^2\}$.

### Kolineacje płaszczyzn nad ciałami

*Stw.* 8. Dla do wolnego automorfizmu $\kappa$ ciała $F$ przekształcenie

$$\psi :< (x_1,x_2,x_3) > \mapsto :< (\kappa(x_1),\kappa(x_2),\kappa(x_3)) >$$

jest jest kolineacją płaszczyzny rzutowej $\mathfrak{P}(F)$.

*Stw.* 9. Dowolny automorfizm liniowy przestrzeni $F^3$ indukuje kolineację płaszczyzny rzutowej $\mathfrak{P}(F)$.

*Uwaga* 6. Grupę automorfizmów liniowych przestrzeni $F^n$ oznaczamy $GL(n, F)$. Macierz kolineacji płaszczyzny rzutowej indukowanej przez przekształcenie z $GL(3, F)$ dana jest z dokładnością do proporcjonalności.

**Def. 5.** Grupę kolineacji indukowanych przez przekształcenia z $GL(3, F)$ oznaczamy $PGL(3, F)$, a $P\Gamma L(3, F)$ oznacza grupę przekształceń postaci $\varphi \circ \psi$, gdzie $\varphi \in PGL(3, F)$

**Twierdzenie 10.** *a) $P\Gamma L(3, F)$ jest grupą wszystkich kolineacji płaszczyzny $\mathfrak{P}(F)$.*

*b) $PGL(3, F)$ jest grupą wszystkich kolineacji rzutowych płaszczyzny $\mathfrak{P}(F)$.*

*Uwaga* 7. Ciało liczb rzeczywistych nie ma innych automorfizmów niż $id$, zatem każda kolineacja płaszczyzny rzutowej nad $\mathbb{R}$ jest rzutowa.

### Rzutowa klasyfikacja rzeczywistych krzywych stopnia 2

**Def. 6.** Krzywą stopnia 2 płaszczyzny rzutowej $\mathfrak{P}(\mathbb{R})$ nazywamy zbiór punktów spełniających równanie:

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0 \tag{1}$$

przy założeniu, że nie wszystkie współczynniki $a_{ij}$ znikają.

Jeśli oznaczymy $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, $U = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$, to równanie (1) zapisujemy:

$$X^T U X = 0.$$

Zbiór punktów właściwych krzywej (1) opisany jest równaniem:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \tag{2}$$

**Twierdzenie 11.** *Każdą krzywą (1) można za pomocą kolineacji rzutowej sprowadzić do jednej z następujących postaci kanonicznych:*

1. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ – *zbiór pusty;*
2. $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ – *stożkowa (niezdegenerowana);*
3. $x_1^2 + x_2^2 = 0$ – *zbiór jednopunktowy;*
4. $x_1^2 - x_2^2 = 0$ – *suma dwóch prostych;*
5. $x_1^2 = 0$ – *prosta.*

*Uwaga* 8. Parabola, hiperbola i elipsa nie są afinicznie równoważne, są natomiast równoważne rzutowo (wszystkie można otrzymać jako obrazy (2) w przekształceniach rzutowych).

*Uwaga* 9. W przypadku płaszczyzny na ciałem liczb zespolonych $\mathbb{C}$ klasyfikacja redukuje się do (2), (4), (5), które odpowiadają rzędom macierzy $A$ równym odpowiednio 3,2 i 1.

**Grupy $P\Gamma L(2,F)$, $PGL(2,F)$ i $PSL(2,F)$**

- Niech $\mathfrak{P}_1(F) := \{< (x_1,x_2) > | \theta \neq (x_1,x_2) \in F^2\}$ i $\overline{\mathfrak{U}_1(F)} := F \cup \{\infty\}$ będą odpowiednio jednorodną i niejednorodną reprezentacją prostej rzutowej nad $F$. Grupy $P\Gamma L(2,F)$ i $PGL(2,F)$ są grupami bijekcji prostej $\mathfrak{P}_1(F)$.
- Dla dowolnej $\psi \in P\Gamma L(2,F)$ istnieją $a,b,c,d \in F$, $ad-bc \neq 0$ i automorfizm $\kappa$ ciała $F$, takie że:

  $\psi :< (x_1,x_2) > \mapsto < (a\kappa(x_1)+b\kappa(x_2), c\kappa(x_1)+d\kappa(x_2)) >.$
- Przy bijekcji $< (1,0) > \mapsto \infty$, $< (x,1) > \mapsto x$ przeprowadzającej $\mathfrak{P}_1(F)$ na $F \cup \{\infty\}$ przekształcenie $\psi$ indukuje następujące przekształcenie $\psi'$ zbioru $F \cup \{\infty\}$:

$$\infty \mapsto \begin{cases} \frac{a}{c} & gdy \quad c \neq 0 \\ \infty & gdy \quad c = 0 \end{cases}, \qquad x \mapsto \begin{cases} \frac{a\kappa(x)+b}{c\kappa(x)+d} & gdy \quad c\kappa(x)+d \neq 0 \\ \infty & gdy \quad c\kappa(x)+d = 0 \end{cases}.$$

- Skrót $x \mapsto \dfrac{a\kappa(x)+b}{c\kappa(x)+d}$ jednoznacznie określa to przekształcenie i dostajemy:
- $P\Gamma L(2,F) = \{x \mapsto \frac{a\kappa(x)+b}{c\kappa(x)+d} |\ a,b,c,d \in F, ad-bc \neq 0, \kappa \in Aut(F)\}$.
- $PGL(2,F) = \{x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d} |\ a,b,c,d \in F, ad-bc \neq 0\}$.
- Dodatkowo definiujemy następującą specjalną podgrupę grupy $PGL(2,F)$:

  $PSL(2,F) = \{x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d} |\ a,b,c,d \in F, ad-bc = 1\}$.

**Twierdzenie 12.** *a) $PGL(2,F)$ działa ściśle 3-tranzytywnie na zbiorze $F \cup \{\infty\}$.*

*b) $PSL(2,F)$ działa 2-tranzytywnie na zbiorze $F \cup \{\infty\}$.*

**Twierdzenie 13.** *Grupa przekształceń rzutowych prostej, pappusowej płaszczyzny rzutowej $\mathfrak{P}(F)$, jest izomorficzna z $PGL(2,F)$.*