Def. 1. *Kolineacją* płaszczyzny afinicznej nazywamy bijekcję zbioru punktów, która przeprowadza proste w proste (czyli automorfizm struktury $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \in)$.

Def. 2. Kolineację nazywamy *dylatacją* gdy przeprowadza ona dowolną prostą w prostą równoległą.

Twierdzenie 1. *Dowolna prosta przechodząca przez punkt X i jego obraz X' w dylatacji jest niezmiennicza. W szczególności dowolna prosta przechodząca przez punkt stały dylatacji jest niezmiennicza.*

Def. 3. Dylatację τ nazywamy translacją gdy nie ma ona punktów stałych lub $\tau = id$. Proste niezmiennicze translacji $\tau \neq id$ tworzą pęk prostych równoległych. Jeśli g jest prostą niezmienniczą translacji τ, to mówimy że τ ma kierunek g. Grupę translacji o kierunku g oznaczamy $T(g)$.

Twierdzenie 2. *Dla dowolnych punktów A, B istnieje co najwyżej jedna translacja τ, taka że $\tau(A) = B$.*

Def. 4. Mówimy, że grupa translacji jest *tranzytywna*, gdy dla dowolnych punktów A, B istnieje translacja τ, taka że $\tau(A) = B$. Płaszczyznę afiniczną nazywamy *płaszczyzną translacyjną*, gdy jej grupa translacji jest tranzytywna.

Twierdzenie 3. *Płaszczyzna afiniczna jest translacyjna wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia następujący mały postulat Desargues'a:*

MD *Dla dowolnych trzech par A, A'; B, B'; C, C' punktów trzech różnych prostych równoległych, z równoległości $AB \parallel A'B'$ i $BC \parallel B'C'$ wynika $AC \parallel A'C'$.*

Def. 5. Mówimy, że grupa $T(g)$ jest *liniowo tranzytywna* gdy dla dowolnych punktów A, B prostej równoległej do g istnieje $\tau \in T(g)$, taka że $\tau(A) = B$.

Twierdzenie 4. *Dylatacja, która ma dwa różne punkty stałe jest identycznością.*

Def. 6. Dylatację δ płaszczyzny afinicznej $\mathfrak{U}$ nazywamy *jednokładnością*, gdy ma ona punkt stały. Punkt ten nazywamy jej *środkiem*. Grupę jednokładności o ustalonym środku Z oznaczamy $\Delta(Z)$. Inwolucyjną jednokładność nazywamy symetrią względem punktu.

Wn. 1. *Proste niezmiennicze jednokładności, to proste które przechodzą przez jej środek Z.*

Twierdzenie 5. *Dla dowolnych punktów $A, B \neq Z$ współliniowych z Z istnieje najwyżej jedna jednokładność $\delta \in \Delta(Z)$, taka że $\delta(A) = B$.*

Jeśli taka jednokładność istnieje dla dowolnej takiej pary punktów A, B, to mówimy że $\Delta(Z)$ jest *liniowo tranzytywna*.

Def. 7. Mówimy, że płaszczyzna afiniczna $\mathfrak{U}$ jest *dezargowa* gdy spełnia następujący postulat Desargues'a:

(D): Dla dowolnych trzech trójek Z, A, A'; Z, B, B'; Z, C, C' punktów trzech różnych prostych (przechodzących przez Z) z równoległości $AB \parallel A'B'$ i $BC \parallel B'C'$ wynika $AC \parallel A'C'$.

Twierdzenie 6. *Płaszczyzna afiniczna $\mathfrak{A}$ jest dezargowa wtedy i tylko wtedy, gdy grupa $\Delta(P)$ jest liniowo tranzytywna dla dowolnego $P \in \mathcal{P}$.*

Def. 8. Kolineację α nazywamy *powinowactwem osiowym*, gdy zbiór jej punktów stałych jest prostą. Nazywamy ją *osią powinowactwa*.

Twierdzenie 7. *Proste niezmiennicze powinowactwa $\alpha \neq id$, to jego oś i proste pewnego pęku prostych równoległych.*

Dowolną prostą tego pęku nazywamy *kierunkiem* powinowactwa.

Twierdzenie 8. *Powinowactwo osiowe jest wyznaczone jednoznacznie przez podanie osi i obrazu jednego punktu spoza osi.*

Def. 9. Powinowactwo o osi równoległej do kierunku nazywamy *ścięciem*.

Def. 10. Grupę powinowactw o osi a oznaczamy $A(a)$, a jej podgrupę powinowactw o osi a i kierunku z oznaczamy $A(a, z)$. Mówimy, że grupa $A(a, z)$ jest liniowo tranzytywna gdy dla dowolnych punktów $P, Q \notin a$ leżących na prostej równoległej do z istnieje $\alpha \in A(a, z)$, taka że $\alpha(P) = Q$.

Def. 11. *Przekształceniem afinicznym* nazywamy dowolną kolineację płaszczyzny afinicznej z grupy generowanej przez translacje, jednokładności i powinowactwa osiowe.

Twierdzenie 9. *Dowolna przekształcenie ψ postaci: $\psi : (x, y) \mapsto (a\kappa(x) + b\kappa(y) + r, c\kappa(x) + d\kappa(y) + s)$ gdzie $a, b, c, d, r, s \in K$, $ad - bc \neq 0$ i κ jest automorfizmem ciała F jest kolineacją płaszczyzny afinicznej $\mathfrak{A}(F)$. Gdy $\kappa = id$, to kolineacja ψ jest przekształceniem afinicznym. W szczególności otrzymujemy:*

a) translację: $(x, y) \mapsto (x + r, y + s)$,

b) powinowactwo o osi Oy i kierunku Ox: $(x, y) \mapsto (ax, y)$,

c) ścięcie o osi Oy: $(x, y) \mapsto (x, y + cx)$,

d) jednokładność o środku $(0, 0)$: $(x, y) \mapsto (tx, ty)$.

Wn. 2. *Płaszczyzna afiniczna nad dowolnym ciałem spełnia postulaty Desarques'a (MD) i (D). Dowolne jej grupy $T(g)$, $\Delta(P)$, $A(a, z)$ są liniowo tranzytywne.*

Twierdzenie 10. *Dla dowolnych dwóch trójkątów płaszczyzny $\mathfrak{A}(F)$ istnieje dokładnie jedno przekształcenie afiniczne, które przeprowadza jeden z nich w drugi.*

Uwaga 1. Twierdzenie 9 można odwrócić. Każda kolineacja płaszczyzny $\mathfrak{A}(F)$ ma przedstawioną w nim postać analityczną.

Uwaga 2. Postulat Desargues'a pozwala skonstruować w płaszczyźnie afinicznej ciało skośne i opisać ją analitycznie analogicznie do $\mathfrak{A}(F)$. Dostajemy też analogiczny opis kolineacji, przy zastrzeżeniu, że jednokładność o środku $(0, 0)$ należy określić wzorem $(x, y) \mapsto (xt, yt)$.

Płaszczyzny pappusowe i fanowskie

Uwaga 3. Przemienność ciała w opisie płaszczyzn dezargowych jest równoważna następującemu postulatowi Pappusa:

(P): Dla dowolnego sześciokąta $P_1, Q_2, P_3, Q_3, P_2, Q_1$, którego trójki wierzchołków P_1, P_2, P_3 i Q_1, Q_2, Q_3 leżą odpowiednio na dwóch różnych prostych g, h z równoległości dwóch par przeciwległych boków wynika równoległość trzeciej pary.

Twierdzenie 11 (Hessenberga)**.** *Z postulatu Pappusa wynika postulat Desargues'a.*

Uwaga 4. Ciało (również ciało skośne) F ma charakterystykę 2 wtedy i tyko wtedy, gdy na płaszczyźnie $\mathfrak{U}(F)$ istnieje równoległobok o równoległych przekątnych (płaszczyzna zawiera konfigurację Fano).

Uwaga 5. Grupa translacji dowolnej płaszczyzny translacyjnej jest przemienna.

Konstrukcja ciała na prostej pappusowej płaszczyzny afinicznej

- Dowolne dwa różne punkty ustalonej prostej g przyjmujemy za 0 i 1 kostruowanego ciała.

  (Pozostałe punkty prostej g będziemy, dla wygody, pisać małymi literami.)

- Grupy $\Delta(0)$ jednokładności ośrodku 0 i $T(g)$ translacji o kierunku g są liniowo tranzytywne.
- Dla dowolnego punktu $a \in g$ bierzemy taką translację $\tau_a \in T(g)$, że $\tau_a(0) = a$.
- Dla dowolnego punktu $a \neq 0$ bierzemy taką jednokładniość $\delta_a \in \Delta(0)$, że $\delta_a(1) = a$.
- Działania określamy następująco:
- $a + b := \tau_a(b)$,
- $a \cdot b := \delta_a(b)$ dla $a \neq 0$ i $0 \cdot a := 0$.
- Zbiór punktów prostej g z tak określonymi działaniami jest ciałem.