Modele rzeczywistej płaszczyzny rzutowej

1. Model w przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^3$ ($P(\mathbb{R}^3)$). Punktami są podprzestrzenie jednowymiarowe, a prostymi podprzestrzenie 2-wymiarowe. Punkt *incyduje* z prostą (należy do prostej), gdy odpowiednia podprzestrzeń jednowymiarowa zawiera się w odpowiedniej dwuwymiarowej. Struktura $P(\mathbb{R}^3) := (\mathcal{P}, \mathcal{G}, \in)$, gdzie $\mathcal{P} := \{< (x_1, x_2, x_3) > | \ \ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}\}$ $\mathcal{G} := \{\{< (x_1, x_2, x_3) > \in \mathcal{P} | ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0\} | (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}\}$.

2. Model na sferze S^2. Punktami są pary (nieuporządkowane) punktów antypodycznych sfery, a prostymi jej okręgi wielkie (przekroje S^2 płaszczyznami przechodzącymi przez środek sfery. Incydencja, to zwykłe zawieranie.

Modele rzeczywistej płaszczyzny rzutowej

3. Rozszerzenie płaszczyzny euklidesowej $\mathbb{R}^2$ do płaszczyzny rzutowej. Do każdej prostej dołączamy jej klasę równoległości jako dodatkowy punkt. Zbiór wszystkich klas równoległości jest dodatkową prostą. $\mathcal{P} = \mathbb{R}^2 \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ $\mathcal{G} = \{\{(x,y) \in \mathcal{P} | \ y = mx + b\} \cup \{(m)\} | \ m, b \in \mathbb{R}\} \cup \{\{(x,y) \in \mathcal{P} | \ x = c\} \cup \{(\infty)\} | \ c \in \mathbb{R}\} \cup \{\{(m) | m \in \mathbb{R}\} \cup \{\infty\}\}$.

Twierdzenie 1. *Opisane trzy modele płaszczyzny rzutowej są izomorficzne.*

Uwaga 1. Zastępując w (1.) lub (3.) ciało liczb rzeczywistych dowolnym ciałem F otrzymujemy analogiczną definicję płaszczyzny rzutowej nad dowolnym ciałem.

Aksjomaty płaszczyzny afinicznej

Def. 1. Niech $\mathcal{P} \neq \emptyset$ będzie dowolnym zbiorem, którego elementy nazywamy *punktami*, a $\mathcal{G} \neq \emptyset$ rodziną jego podzbiorów nazywanych *prostymi. Płaszczyzną afiniczną* nazywamy strukturę $\mathfrak{U} = (\mathcal{P}, \mathcal{G}, \in)$ spełniającą aksjomaty:

A1: Dla dowolnych dwóch różnych punktów P, Q istnieje dokładnie jedna prosta g, taka że $P, Q \in g$.

A2: Dla dowolnej prostej g i punktu $P \notin g$ istnieje dokładnie jedna prosta g', taka że $P \in g$ i $g \cap g' = \emptyset$.

A3: Istnieją trzy punkty, które nie należą do jednej prostej.

Jedyną prostą przechodzącą przez dwa różne punkty P, Q oznaczamy PQ. Mówimy, że proste g, h są równoległe (oznaczenie $g \parallel h$) gdy $g = h$ lub $g \cap h = \emptyset$.

Twierdzenie 2. *$\parallel$ jest relacją równoważności w zbiorze prostych.*

Twierdzenie 3. *Proste płaszczyzny afinicznej są równoliczne.*

Def. 2. W przypadku gdy $|\mathcal{P}| < \infty$ liczbę $n := |g|$ nazywamy rzędem płaszczyzny.

Ex. 1. Model minimalny płaszczyzny afinicznej tzw. płaszczyzna Fano zawiera 4 punkty i 6 prostych: $\mathcal{P} = \{A, B, C, D\}$; $\mathcal{G} = \{\{A, B\}, \{A, C\}, \{A, D\}, \{B, C\}, \{B, D\}, \{C, D\}\}$.

Płaszczyzna afiniczna nad ciałem

Twierdzenie 4. *Niech F będzie ciałem, $\mathcal{P} = F^2$ i $\mathcal{G} = \{\{(x,y) \in \mathcal{P}|\ y = mx+b\}|\ m,b \in F\} \cup \{\{(x,y) \in \mathcal{P}|\ x = c\}|\ c \in F\}$. Wówczas struktura $\mathfrak{A}(F) = (\mathcal{P}, \mathcal{G}, \in)$ jest płaszczyzną afiniczną.*

Uwaga 2. Płaszczyzna Fano jest izomorficzna z płaszczyzną afiniczną nad ciałem $\mathbb{Z}_2$.

Aksjomaty płaszczyzny rzutowej

Def. 3. Niech $\mathcal{P} \neq \emptyset$ będzie dowolnym zbiorem, którego elementy nazywamy punktami, a $\mathcal{G} \neq \emptyset$ rodziną jego podzbiorów nazywanych prostymi. Płaszczyzną rzutową nazywamy strukturę $\mathfrak{P} = (\mathcal{P}, \mathcal{G}, \in)$ spełniającą aksjomaty:

P1: Dla dowolnych dwóch różnych punktów P, Q istnieje dokładnie jedna prosta g, taka że $P, Q \in g$.

P2: Dla dowolnych dwóch różnych prostych g, h istnieje dokładnie jeden punkt P, taki że $g \cap h = \{P\}$.

P3: Istnieją cztery punkty, z których żadne trzy nie są współliniowe.

Prostą przechodzącą przez dwa różne punkty P, Q oznaczamy PQ. Punkt wspólny dwóch różnych prostych g, h oznaczamy gh. Będziemy też pisać $g \cap h = P$ utożsamiając zbiór jednopunktowy $\{P\}$ z jego jedynym elementem P. Zamiast $P \in g$ mówimy również P *incyduje* z g (g incyduje z P).

Twierdzenie 5. *Teoria płaszczyzn rzutowych wyrażona w języku incydencji jest samodualna tzn. dowolne twierdzenie tej teorii pozostanie prawdziwe jeśli zastąpimy punkty prostymi a proste punktami.*

Twierdzenie 6.

1. *Niech $\mathfrak{A} = (\mathcal{P}, \mathcal{G}, \in)$ będzie płaszczyzną afiniczną a $\mathcal{U}$ zbiorem klas równoległości jej prostych, wówczas płaszczyzną rzutową jest struktura $\overline{\mathfrak{A}} := (\mathcal{P}', \mathcal{G}', \in)$, gdzie $\mathcal{P}' := \mathcal{P} \cup \mathcal{U}$; $\mathcal{G}' := \{g \cup u_g | g \in \mathcal{P}, u_g \in \mathcal{U} : g \in u_g\} \cup \{\mathcal{U}\}$.*

2. *Niech $\mathfrak{P} = (\mathcal{P}, \mathcal{G}, \in)$ będzie płaszczyzną rzutową i $g_\infty \in \mathcal{G}$ jej ustaloną prostą. Wówczas płaszczyzną afiniczną jest struktura $\overline{\mathfrak{P}} := (\mathcal{P}', \mathcal{G}', \in)$, gdzie $\mathcal{P}' := \mathcal{P} \setminus g_\infty$; $\mathcal{G}' := \{g \setminus g_\infty | g \in \mathcal{G} \setminus \{g_\infty\}\}$.*

Płaszczyznę rzutową $\overline{\mathfrak{A}}$ opisaną w punkcie (1) nazywamy *rzutowym uzupełnieniem* płaszczyzny afinicznej $\mathfrak{A}$.

Def. 4. Niech $Z \notin g$. *Perspektywą* prostej g i pęku (Z) nazywamy bijekcję: $\pi : g \to (Z)$; $\pi : P \mapsto PZ$ lub bijekcję π^{-1}. Złożenie skończonej ilości perspektyw nazywamy *przekształceniem rzutowym.*

Wn. 1. *Proste i pęki płaszczyzny rzutowej są równoliczne.*

Def. 5. W przypadku gdy $|\mathcal{P}| < \infty$ liczbę $n := |g| - 1$ nazywamy rzędem płaszczyzny.

Ex. 2. Modelem minimalnym płaszczyzny rzutowej jest płaszczyzna rzędu 2 (*rzutowa konfiguracja Fano*), która jest rzutowym rozszerzeniem afinicznej płaszczyzny Fano.