

Model Poincare'go w kole

- Zbiór punktów to wnętrze koła $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.
- Okrąg $u = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ nazywamy *absolutem*.
- Proste to otwarte odcinki łuków okręgów ortogonalnych do absolutu i średnic.
- Grupa przekształceń (izometrii modelu) generowana jest przez inwersje względem okręgów ortogonalnych do absolutu i symetrie względem średnic (które są hiperbolicznymi symetrami osiowymi).

Uwaga 1. Modele Poincare'go (w kole i w półpłaszczyźnie) są wiernokątne. Euklidesowe kąty pomiędzy krzywymi są jednocześnie kątami geometrii hiperbolicznej.

Model Poincare'go w półpłaszczyźnie

- Zbiór punktów to otwarta półpłaszczyzna $\{z \in \mathbb{C} : \text{Im} z > 0\}$, absolutem u jest oś rzeczywista (z dołączonym punktem (∞));
- Proste to otwarte odcinki łuków okręgów ortogonalnych do absolutu i półproste ortogonalne do absolutu;
- Grupa przekształceń (izometrii modelu) generowana jest przez inwersje względem okręgów i symetrie względem prostych ortogonalnych do absolutu (które są hiperbolicznymi symetrami osiowymi).
- $S_{(a),r} : z \mapsto \frac{r^2}{\bar{z}-a} + a$ - inwersja o środku rzeczywistym (a) i promieniu r
- $S_l : z \mapsto 2a - \bar{z}$ - symetria względem prostej $l : x = a$.
- Grupa ta składa się z *homografii* $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ oraz *antygrafii* $z \mapsto \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$ o rzeczywistych współczynnikach i dodatnim dla homografii, a ujemnym dla antygrafii, wyznaczniku $ad - bc$.

W modelu Poincare'go w półpłaszczyźnie:

$$|AB|_h = \left| \ln \frac{|MA|}{|MB|} \right|,$$

gdy A, B są punktami półprostej o środku M na absolutie;

$$|AB|_h = \left| \ln \left(\frac{|MA|}{|NA|} : \frac{|MB|}{|NB|} \right) \right| = \left| \ln \left(\text{ctg} \frac{\theta_A}{2} : \text{ctg} \frac{\theta_B}{2} \right) \right|$$

gdy A, B leżą na półokręgu o końcach M i N na absolutie, O jest środkiem tego okręgu, a θ_A, θ_B są miarami kątów środkowych tego okręgu wyznaczonych odpowiednio przez OA, OB i dodatnią półoś absolutu.

Twierdzenie 1. Modele Poincare'go w kole i w półpłaszczyźnie są izomorficzne.