Model Poincare'go w kole

- Zbiór punktów to wnętrze koła $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.
- Okrąg $u = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ nazywamy *absolutem.*
- Proste to otwarte odcinki łuków okręgów ortogonalnych do absolutu i średnic.
- Grupa przekształceń (izometrie modelu) to przekształcenia płaszczyzny Möbiusa zachowujące koło.

  Grupa ta generowana jest przez inwersje względem okręgów ortogonalnych do absolutu i symetrie względem średnic (które są hiperbolicznymi symetriami osiowymi).

Uwaga 1. Modele Poincare'go (w kole i w półpłaszczyźnie) są wiernokątne. Euklidesowe kąty pomiędzy krzywymi są jednocześnie kątami geometrii hiperbolicznej.

Model Poincare'go w półpłaszczyźnie

- Zbiór punktów to otwarta półpłaszczyzna $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im} z > 0\}$, absolutem u jest oś rzeczywista (z dołączonym punktem (∞));
- Proste to otwarte odcinki łuków okręgów ortogonalnych do absolutu i półproste ortogonalne do absolutu;
- Grupa przekształceń (izometrie) to przekształcenia płaszczyzny Möbiusa zachowujące półpłaszczyznę, czyli homografie $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ oraz *antygrafie* $z \mapsto \frac{a\overline{z}+b}{c\overline{z}+d}$ o rzeczywistych współczynnikach i dodatnim dla homografii, a ujemnym dla antygrafii, wyznaczniku.

  Grupa ta generowana jest przez inwersje względem okręgów i symetrie względem prostych ortogonalnych do absolutu (które są hiperbolicznymi symetriami osiowymi).
- $\mathbf{S}_{(a),r} : z \mapsto \frac{r^2}{\overline{z}-a} + a$ - inwersja o środku rzeczywistym (a) i promieniu r
- $S_l : z \mapsto 2a - \overline{z}$ - symetria względem prostej $l : x = a$.

W modelu Poincare'go w półpłaszczyźnie:

$$|AB|_h = \Big| \ln \frac{|MA|}{|MB|} \Big|,$$

gdy A, B są punktami półprostej o środku M na absolucie;

$$|AB|_h = \big| \ln \big(\mathrm{ctg} \frac{\theta_A}{2} : \mathrm{ctg} \frac{\theta_B}{2} \big) \big| = \big| \ln \big(\frac{|MA|}{|NA|} : \frac{|MB|}{|NB|} \big) \big|$$

gdy A, B leżą na półokręgu o środku O na absolucie, θ_A, θ_B są miarami kątów środkowych tego okręgu wyznaczonych odpowiednio przez OA, OB i dodatnią półoś absolutu, a M, N punktami wpólnymi okręgu z absolutem.

Twierdzenie 1. *Modele Poincare'go w kole i półpłaszczyźnie są izomorficzne.*