Geometria hiperboliczna

Definicja 1. Proste, które nie przecinają się i nie są równoległe nazywamy *nadrównoległymi.*

Twierdzenie 1. *Dwie proste przecinające daną prostą w różnych punktach pod przystającymi skierowanymi kątami są nadrównoległe.*

Twierdzenie 2. *Proste są nadrównoległe wtedy i tylko wtedy, gdy mają wspólną prostopadłą.*

Wn. 1. *Jeśli $O \notin a$, to proste a i $\mathbf{S}_O(a)$ są nadrównoległe.*

Definicja 2. Klasy półprostych równoległych nazywamy *końcami.* Oznaczamy je wielkimi literami pisanymi w nawiasie (M). Półprostą o początku A półprostą i końcu (M) oznaczamy $h(A,(M))$.

Definicja 3. Jeśli $h(A,(M))$, $h(B,(M)$ nie leżą na jednej prostej, to trójkę $AB(M)$ nazywamy *trójkątem asymptotycznym.* Analogicznie określamy trójkąty *podwójnie asymptotyczne* $A(M)(N)$ i *potrójnie asymptotyczne* $(M)(N)(P)$.

Twierdzenie 3. *Trójkąty (również asymptotyczne) przystają wtedy i tylko wtedy, gdy mają przystające kąty.*

Definicja 4. *Prostą zagradzającą* kąta $\angle ab$ nazywamy prostą równoległą jednocześnie do obu półprostych a, b.

Twierdzenie 4. *Istnieje dokładnie jedna prosta zagradzająca dowolnego kąta.*

Wn. 2. *Przez każde dwa końce przechodzi dokładnie jedna prosta.*

Wn. 3. *Jeśli żaden z końców prostej a nie jest końcem półprostej k, to istnieje dokładnie jedna prosta, która jest jednocześnie prostopadła do a i równoległa do k.*

Wn. 4. *Dowolne dwa trójkąty potrójnie asymptotyczne są przystające.*

Definicja 5. *Naturalnym odcinkiem podstawowym* nazywamy odcinek swobodny wyznaczony przez wierzchołek kąta prostego i jego rzut prostokątny na prostą zagradzającą tego kąta. Miarę odcinków, która przyjmuje wartość

$$\ln(1+\sqrt{2})$$

dla naturalnego odcinka swobodnego nazywamy *naturalną długością* odcinków geometrii hiperbolicznej.

Uwaga 1. Długość odcinka w modelu Poincare'go w półpłaszczyźnie jest naturalną długością odcinka.

Definicja 6. *Funkcją Łobaczewskiego* nazywamy funkcję

$$\Pi(0,+\infty) \to (0,\frac{\pi}{2}),$$

która dowolnej długości odcinka przyporządkowuje miarę odpowiadającego mu kąta równoległości.

Twierdzenie 5. *Funkcja Łobaczewskiego jest ciągła, malejąca oraz*

$$\lim_{x\to 0}\Pi(x)=\frac{\pi}{2};\qquad \lim_{x\to\infty}\Pi(x)=0.$$

Przy naturalnej długości odcinka

$$\Pi(x)=2\mathrm{arcctg}e^x$$

Dodatkowo przyjmujemy $\Pi(0)=\frac{\pi}{2}$.

Definicja 7. Zbiór prostych:

1. o wspólnym końcu nazywamy *pękiem równoległych*,
2. prostopadłych do ustalonej prostej - *pękiem nadrównoległych*,
3. przechodzących przez ustalony punkt *pękiem właściwym*.

Twierdzenie 6. *Symetralne boków trójkąta są współpękowe.*

Definicja 8. *Horocyklem* (odp. *ekwidystantą*) nazywamy orbitę dowolnego punktu względem grupy generowanej przez symetrie o osiach z pęku prostych równoległych (odp. nadrównoległych i ich wspólną prostopadłą). Wspólny koniec prostych równoległych nazywamy *środkiem horocyklu* a wspólną prostopadłą *osią* ekwidystanty.

Lemat 1. *Dla każdej pary prostych istnieje oś symetrii.*

Twierdzenie 7. *Figura F jest horocyklem o środku (M) wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia warunki:*

1. *ma dokładnie jeden punkt wspólny z każdą prostą pęku (M),*
2. *dla dowolnych punktów $A,B\in\mathcal{F}$ i odpowiednio zawierających je prostych $a,b\in(M)$ zachodzi:*
$$A\mathbf{R}_b(A)\equiv B\mathbf{R}_a(B).$$

Twierdzenie 8. *Ekwidystanta jest zbiorem punktów o ustalonej odległości od osi.*

Uwaga 2. Polem będziemy nazywać dowolną funkcję określoną na wielokątach, niezmienniczą względem izometrii i addytywną.

Definicja 9. *Defektem* trójkąta nazywamy różnicę $\pi-\alpha-\beta-\gamma$, gdzie α,β,γ są miarmi jego kątów.

Twierdzenie 9. *Każdy trójkąt asymptotyczny ma skończone pole.*

Twierdzenie 10. *Pole trójkąta jest wprost proporcjonalne do jego defektu.*

Określamy pole trójkąta podwójnie asymptotycznego jako funkcję $\Delta(\alpha)$ jego kąta zewnętrznego. Pole trójkąta potrójnie asymptotycznego oznaczamy p.

1. $\Delta(\alpha)+\Delta(\pi-\alpha)=p$,
2. $\Delta(\alpha)+\Delta(\beta)+\Delta(\pi-\alpha-\beta)=p$,
3. $\Delta(\alpha)+\Delta(\beta)=\Delta(\alpha+\beta)$,
4. $\Delta(\alpha)=\mu\alpha$ dla pewnej stałej $\mu\in\mathbb{R}$.

Klasyfikacja izometrii geometrii hiperbolicznej

Twierdzenie 11 (O redukcji w pęku)**.** *Dla dowolnych współpękowych prostych a, b, c istnieje taka, współpękowa z nimi prosta d, że $\mathbf{S}_d = \mathbf{S}_c \circ \mathbf{S}_b \circ \mathbf{S}_a$.*

Definicja 10. Złożenie dwóch symetrii osiowych nazywamy *obrotem właściwym*, *obrotem granicznym* lub *translacją hiperboliczną*, gdy ich osie odpowiednio przecinają się, są równoległe lub są nadrównoległe. Złożenie trzech symetrii względem prostych nadrównoległych i ich wspólnej prostopadłej nazywamy *symetrią z poślizgiem.*

Uwaga 3. Obrót wyznaczony przez symetrie o osiach prostopadłych jest symetrią środkową.

Twierdzenie 12. *Każda izometria płaszczyzny hiperbolicznej jest symetrią osiową, obrotem właściwym, obrotem granicznym, translacją hiperboliczną lub symetrią z poślizgiem.*