Geometria hiperboliczna

Definicja 1. Klasy półprostych równoległych nazywamy *końcami*. Oznaczamy je wielkimi literami pisanymi w nawiasie (M). Przechodzącą przez dany punkt A półprostą o końcu (M) oznaczamy $h(A,(M))$. Jeśli $h(A,(M))$, $h(B,(M)$ nie leżą na jednej prostej, to trójkę $AB(M)$ nazywamy *trójkątem asymptotycznym*. Analogicznie określamy trójkąty *podwójnie asymptotyczne* $A(M)(N)$ i *potrójnie asymptotyczne* $(M)(N)(P)$.

Twierdzenie 1. *Trójkąty (również asymptotyczne) przystają wtedy i tylko wtedy, gdy mają przystające kąty.*

Definicja 2. Proste, które nie przecinają się i nie są równoległe nazywamy *nadrównoległymi.*

Twierdzenie 2. *Proste są nadrównoległe wtedy i tylko wtedy, gdy mają wspólną prostopadłą.*

Wn. 1. *Jeśli $O \notin a$, to proste a i $\mathbf{S}_O(a)$ są nadrównoległe.*

Definicja 3. *Prostą zagradzającą* kąta $\angle ab$ nazywamy prostą równoległą jednocześnie do obu półprostych a, b.

Twierdzenie 3. *Istnieje dokładnie jedna prosta zagradzająca dowolnego kąta.*

Wn. 2. *Przez każde dwa końce przechodzi dokładnie jedna prosta.*

Wn. 3. *Jeśli żaden z końców prostej a nie jest końcem półprostej k, to istnieje dokładnie jedna prosta, która jest jednocześnie prostopadła do a i równoległa do k.*

Wn. 4. *Dowolne dwa trójkąty potrójnie asymptotyczne są przystające.*

Definicja 4. *Naturalnym odcinkiem podstawowym* nazywamy odcinek swobodny wyznaczony przez wierzchołek kąta prostego i jego rzut prostokątny na prostą zagradzającą tego kąta. Miarę odcinków, która przyjmuje wartość

$$\ln(1+\sqrt{2})$$

dla naturalnego odcinka swobodnego nazywamy *naturalną długością* odcinków geometrii hiperbolicznej.

Uwaga 1. Długość odcinka w modelu Poincare'go w półpłaszczyźnie jest naturalną długością odcinka.

Definicja 5. *Funkcją Łobaczewskiego* nazywamy funkcję

$$\Pi(0,+\infty) \to (0,\frac{\pi}{2}),$$

która dowolnej długości odcinka przyporządkowuje miarę odpowiadającego mu kąta równoległości.

Twierdzenie 4. *Funkcja Łobaczewskiego jest ciągła, malejąca oraz*

$$\lim_{x\to 0}\Pi(x) = \frac{\pi}{2}; \qquad \lim_{x\to\infty}\Pi(x) = 0.$$

Przy naturalnej długości odcinka

$$\Pi(x) = 2\mathrm{arcctg} e^{x}$$

Dodatkowo przyjmujemy $\Pi(0) = \frac{\pi}{2}$.

Definicja 6. Zbiór prostych:

1. o wspólnym końcu nazywamy *pękiem równoległych*,
2. prostopadłych do ustalonej prostej - *pękiem nadrównloległych*,
3. przechodzących przez ustalony punkt *pękiem właściwym*.

Twierdzenie 5. *Symetralne boków trójkąta są współpękowe.*

Definicja 7. *Horocyklem* (odp. *ekwidystantą*) nazywamy orbitę dowolnego punktu względem grupy generowanej przez symetrie o osiach z pęku prostych równoległych (odp. nadrównoległych i ich wspólną prostopadłą). Wspólny koniec prostych równoległych nazywamy *środkiem horocyklu* a wspólną prostopadłą *osią* ekwidystanty.

Lemat 1. *Dla każdej pary prostych istnieje oś symetrii.*

Twierdzenie 6. *Figura F jest horocyklem o środku (M) wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia warunki:*

1. *ma dokładnie jeden punkt wspólny z każdą prostą pęku (M),*
2. *dla dowolnych punktów $A, B \in \mathcal{F}$ i odpowiednio zawierających je prostych $a, b \in (M)$ zachodzi:*
$$A\mathbf{R}_b(A) \equiv B\mathbf{R}_a(B).$$

Twierdzenie 7. *Ekwidystanta jest zbiorem punktów o ustalonej odległości od osi.*

Uwaga 2. Polem będziemy nazywać dowolną funkcję określoną na wielokątach, niezmienniczą względem izometrii i addytywną.

Definicja 8. *Defektem* trójkąta nazywamy różnicę $\pi - \alpha - \beta - \gamma$, gdzie α, β, γ są miarmi jego kątów.

Twierdzenie 8. *Każdy trójkąt asymptotyczny ma skończone pole.*

Twierdzenie 9. *Pole trójkąta jest wprost proporcjonalne do jego defektu.*

Określamy pole trójkąta podwójnie asymptotycznego jako funkcję $\Delta(\alpha)$ jego kąta zewnętrznego. Pole trójkąta potrójnie asymptotycznego oznaczamy p.

1. $\Delta(\alpha) + \Delta(\pi - \alpha) = p$,
2. $\Delta(\alpha) + \Delta(\beta) + \Delta(\pi - \alpha - \beta) = p$,
3. $\Delta(\alpha) + \Delta(\beta) = \Delta(\alpha + \beta)$,
4. $\Delta(\alpha) = \mu\alpha$ dla pewnej stałej $\mu \in \mathbb{R}$.

Klasyfikacja izometrii geometrii hiperbolicznej

Twierdzenie 10 (O redukcji w pęku)**.** *Dla dowolnych współpękowych prostych a, b, c istnieje taka, współpękowa z nimi prosta d, że* $\mathbf{S}_d = \mathbf{S}_c \circ \mathbf{S}_b \circ \mathbf{S}_a$.

Definicja 9. Złożenie dwóch symetrii osiowych nazywamy *obrotem właściwym*, *obrotem granicznym* lub *translacją hiperboliczną*, gdy ich osie odpowiednio przecinają się, są równoległe lub są nadrównoległe. Złożenie trzech symetrii względem prostych nadrównoległych i ich wspólnej prostopadłej nazywamy *symetrią z poślizgiem*.

Uwaga 3. Obrót wyznaczony przez symetrie o osiach prostopadłych jest symetrią środkową.

Twierdzenie 11. *Każda izometria płaszczyzny hiperbolicznej jest symetrią osiową, obrotem właściwym, obrotem granicznym, translacją hiperboliczną lub symetrią z poślizgiem.*