

Aksjomatyka geometrii absolutnej bezwymiarowej:

$$A1 \quad AB \equiv BA$$

$$A2 \quad AB \equiv PQ \wedge AB \equiv RS \rightarrow PQ \equiv RS$$

$$A3 \quad AB \equiv CC \rightarrow A = B$$

$$A4 \quad \exists X(\mathcal{B}(QAX) \wedge AX \equiv BC) \text{ (aksjomat o odkładaniu odcinka)}$$

$$A5 \quad (A \neq B \wedge \mathcal{B}(ABC) \wedge \mathcal{B}(A'B'C') \wedge AB \equiv A'B' \wedge BC \equiv B'C' \wedge AD \equiv A'D' \wedge BD \equiv B'D') \rightarrow CD \equiv C'D' \text{ (aksjomat o pięciu odcinkach)}$$

$$A6 \quad \mathcal{B}(ABA) \rightarrow A = B$$

$$A7 \quad \mathcal{B}(APC) \wedge \mathcal{B}(BQC) \rightarrow \exists X(\mathcal{B}(PXB) \wedge \mathcal{B}(QXA)) \text{ (aksjomat Pasha)}$$

Aksjomaty wymiaru:

$$A8 \quad \exists A, B, C(\neg \mathcal{B}(ABC) \wedge \neg \mathcal{B}(BCA) \wedge \neg \mathcal{B}(CAB)) \text{ (dolny aksjomat wymiaru)}$$

$$A9 \quad (P \neq Q \wedge AP \equiv AQ \wedge BP \equiv BQ \wedge CP \equiv CQ) \rightarrow (\mathcal{B}(ABC) \vee \mathcal{B}(BCA) \vee \mathcal{B}(CAB)) \text{ (górny aksjomat wymiaru)}$$

Aksjomat Euklidesa i jego równoważna forma:

$$A10 \quad \mathcal{B}(ADT) \wedge \mathcal{B}(BDC) \wedge A \neq D \rightarrow$$

$$\exists X, Y(\mathcal{B}(ABX) \wedge \mathcal{B}(ACY) \wedge \mathcal{B}(XTY))$$

$$A10' \quad \mathcal{B}(ABC) \wedge \mathcal{B}(CDE) \wedge \mathcal{B}(EFA) \wedge AB \equiv BC \wedge CD \equiv DE \wedge EF \equiv FA \rightarrow FA \equiv BD$$

Aksjomat ciągłości

$$A11 \quad \forall \mathcal{X}, \mathcal{Y}\{\exists A \forall X, Y[X \in \mathcal{X} \wedge Y \in \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{B}(AXY)] \rightarrow \exists B \forall X, Y[X \in \mathcal{X} \wedge Y \in \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{B}(XBY)]\}$$

Definicja 1. 2-wymiarową rzeczywistą *geometrią hiperboliczną* nazywamy teorię aksjomatów $A1, \dots, A9, \neg A10, A11$.

$$\neg A10 \quad \exists A, B, C, D, T : \mathcal{B}(ADT) \wedge \mathcal{B}(BDC) \wedge A \neq D \wedge$$

$$(\forall X, Y : (\mathcal{B}(ABX) \wedge \mathcal{B}(ACY) \rightarrow \neg \mathcal{B}(XTY))$$

Definicje i oznaczenia

1. Współliniowość punktów A, B, C : $Col(ABC) :\leftrightarrow (\mathcal{B}(ABC) \vee \mathcal{B}(BCA) \vee \mathcal{B}(CAB))$
2. Prosta przechodząca przez punkty: $A \neq B$: $l(A, B) := \{X \mid Col(ABX)\}$.
3. Półprosta o początku A , przechodząca przez B : $h(A, B) := \{X \mid \mathcal{B}(ABX) \vee \mathcal{B}(AXB)\}$.
4. Symetralna odcinka AB ($A \neq B$): $s(A, B) := \{X \mid AX \equiv BX\}$.
5. Środek odcinka: $\mathbf{M}(A, B) = X \leftrightarrow \mathbf{B}(AXB) \wedge AX \equiv XB$.
6. Symetria środkowa: $\mathbf{S}_O(A) = A' :\leftrightarrow \mathbf{M}(A, A') = O$.

Def. Przekształcenie φ nazywamy inwolucją gdy $\varphi \circ \varphi = id$ i $\varphi \neq id$.

Tw. $\mathbf{S}_O$ jest inwolucyjną izometrią.

Definicje i oznaczenia cd.

6. Punkty A, C, B tworzą kąt prosty:
$$\mathcal{R}(ACB) :\leftrightarrow AB \equiv \mathbf{A}\mathbf{S}_C(B).$$
7. $a \perp b :\leftrightarrow$

$$\exists A, C, B(\mathcal{R}(ACB) \wedge C \in a, b \wedge A \in a \wedge B \in b \wedge C \neq A, B).$$
8. Rzut prostokątny punktu A na prostą l :
$$\mathbf{R}_l(A) = A' :\leftrightarrow \forall X \in l(\mathcal{R}(AA'X)).$$
9. Symetria osiowa: $\mathbf{S}_l(A) = A' :\leftrightarrow \mathbf{M}(A, A') = \mathbf{R}_l(A)$

Tw. $\mathbf{S}_l$ jest inwolucyjną izometrią.

Tw. Niech $A \in a, b$. Wówczas:

$$a \perp b \leftrightarrow \mathbf{S}_A = \mathbf{S}_a \circ \mathbf{S}_b \leftrightarrow \mathbf{S}_b \circ \mathbf{S}_a = \mathbf{S}_a \circ \mathbf{S}_b \neq id.$$

Wybrane pojęcia i twierdzenia geometrii absolutnej

- Tw. [O sztywności dla prostej]: Dowolna izometria zachowująca dwa różne punkty prostej, zachowuje wszystkie punkty tej prostej.
- Tw. [O sztywności dla płaszczyzny]: Dowolna izometria zachowująca trzy punkty niewspółliniowe zachowuje wszystkie punkty zawierającej je płaszczyzny (jest identycznością płaszczyzny absolutnej).

Tw. [O doskonałej jednorodności]: Jeśli $\neg Col(ABC)$ i $(ABC) \equiv (A'B'C')$, to istnieje dokładnie jedna izometria φ , która przeprowadza A, B, C odpowiednio na A', B', C' .

Wn.: Każda izometria płaszczyzny absolutnej jest złożeniem dwóch lub trzech symetrii osiowych.

Tw. [O redukcji w pęku prostych przecinających się]: Dla dowolnych trzech prostych a, b, c przechodzących przez ustalony punkt istnieje taka, wspólnopękowa z nimi prosta d , że $\mathbf{S}_d = \mathbf{S}_c \circ \mathbf{S}_b \circ \mathbf{S}_a$.

- Porównywanie odcinków i dodawanie odcinków swobodnych

$$AB \leq CD :\Leftrightarrow \exists E : AB \equiv CE \wedge \mathcal{B}(CED)$$

$$AB < CD :\Leftrightarrow AB \leq CD \wedge \neg AB \equiv CD$$

odcinki swobodne $[A, B]$ - klasy relacji $\equiv$

$$[A, B] + [C, D] := [E, F] \Leftrightarrow \exists K, L, M : AB \equiv KL \wedge CD \equiv LM \wedge EF \equiv KM \wedge \mathcal{B}(KLM); \quad \frac{1}{2}[A, B] := [A, \mathbf{M}(A, B)];$$

Dla teorii aksjomatów $A1, \dots, A9$ miara odcinka jest addytywną funkcją

$$\mu : \mathcal{D}' \rightarrow \left\{ \frac{n}{2^k} : m, k \in \mathbb{N} \right\}$$

gdzie $\mathcal{D}'$ jest podzbiorem zbioru odcinków swobodnych $\mathcal{D}$.

Po założeniu aksjomatu ciągłości $A11$ miarę rozszerzamy do funkcji $\mu : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$.

- Leżenie w kącie. Mówimy, że P leży w kącie $\angle ABC$:

$$I(P, \angle ABC) :\Leftrightarrow \exists X : \mathcal{B}(AXC) \wedge X \in h(B, P).$$

- Porównywanie kątów:

$$\angle ABC \leq \angle DEF :\Leftrightarrow \exists P : I(P, \angle DEF) \wedge \angle ABC \equiv \angle DEP.$$

- Dodawanie kątów swobodnych. Kąty swobodne $\alpha = [\angle ABC]$, to klasy relacji przystawiania kątów.

$$\alpha + \beta = \gamma :\Leftrightarrow \exists A, B, C, D : \angle ABC \in \alpha \wedge \angle CBD \in \beta \wedge \angle ABD \in \gamma \wedge (I(C, \angle ABD) \vee I(\mathbf{S}_B(C), ABD))$$

Dla teorii aksjomatów $A1, \dots, A9, A11$ miara kąta jest addytywną funkcją

$$\nu : \mathcal{K} \rightarrow [0, \pi)$$

gdzie $\mathcal{K}$ jest zbiorem kątów swobodnych.

Dla skierowanych kątów swobodnych miarę można przedłużyć do przedziału $[0, 2\pi)$.

- Dla półprostych a, b, c o wspólnym początku O stosujemy oznaczenia:
 $\angle ab$ - kąt pomiędzy półprostymi a, b ,
 $a^* := \mathbf{S}_O(a)$ - półprosta uzupełniająca,
 $\mathbf{M}(a, b)$ - dwusieczna kąta $\angle ab$,
 $\mathcal{B}(abc)$, gdy półprosta b leży w kącie $\angle ac$,
- Cechy przystawania trójkątów: $(bbb), (bkb), (kbb)$.
- Półpłaszczyznę (domkniętą) wyznaczoną przez prostą a i punkt $P \notin a$ oznaczamy $Hp(a, P)$.

Twierdzenie 1 (O kącie zewnętrznym). $\neg Col(ABC) \wedge \mathcal{B}(BAD) \wedge A \neq D \rightarrow \angle ACB, \angle ABC < \angle CAD$ (kąt zewnętrzny w trójkącie jest większy od każdego z kątów wewnętrznych przy pozostałych wierzchołkach).

Twierdzenie 2. W dowolnym trójkącie ABC

1. $AB \equiv AC \leftrightarrow \angle ACB \equiv \angle ABC$
2. $AB < AC \leftrightarrow \angle ACB < \angle ABC$

Wn. 1. Dwie proste przecinające daną prostą pod tym samym kątem skierowanym są rozłączne.

Wn. 2. Jeśli dwie proste mają wspólną prostopadłą, to są rozłączne.

Twierdzenie 3. Niech $AB \equiv A'B'$ i $BC \equiv B'C'$. Wówczas $AC > A'C'$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\angle ABC > \angle A'B'C'$.

Definicja 2. Mówimy, że półprosta $b = h(B, B')$ jest równoległa do półprostej $a = h(A, A')$, gdy:

1. $a \subset b$ lub $b \subset a$ lub
2. a, b leżą po tej samej stronie prostej $l(A, B)$ i w pęku o wierzchołku B uporządkowanym od $h(B, A)$ do $h^*(B, A)$, b jest pierwszą, która nie przecina a .

Twierdzenie 4. Relacja równoległości półprostych jest relacją równoważności.

Definicja 3. Dwie proste są równoległe, gdy zawierają równoległe półproste. Prosta jest równoległa do półprostej gdy zawiera równoległą do niej półprostą.

Wn. 3. Dla dowolnych prostych równoległych a, b istnieje taka prosta m , że $\mathbf{S}_m(a) = b$.

Kąt równoległości

Uwaga 1. Równoległość prostych nie jest relacją równoważności.

Definicja 4. Dla dowolnej prostej a i dowolnego punktu $A \notin a$ kątem równoległości nazywamy kąt:

$$\angle Aa := \angle bc,$$

gdzie $b = h(A\mathbf{R}_a(A))$ i $c = h(A, A') \parallel a$.

Wn. 4. Kąt równoległości jest nie większy od kąta prostego.

Twierdzenie 5. Jeżeli $A_1 \notin a_1$, $A_2 \notin a_2$, $B_1 = \mathbf{R}_{a_1}(A_1)$, $B_2 = \mathbf{R}_{a_2}(A_2)$, to

1. $A_1B_1 \equiv A_2B_2 \rightarrow \angle A_1a_1 \equiv \angle A_2a_2$
2. $A_1B_1 < A_2B_2 \rightarrow \angle A_1a_1 \geq \angle A_2a_2$

Twierdzenie 6 (Archimedes).

$$\forall A, B, C, D (A \neq B \rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : n[A, B] > [C, D]).$$

Twierdzenie 7. Jeśli istnieje prosty kąt równoległości, to każdy kąt równoległości jest prosty.

Definicja 5. Czworokątem Saccheriego nazywamy czwórkę punktów A, B, C, D , takich że A, D leżą po tej samej stronie prostej $l(B, C)$, $AB \equiv CD$, $\mathbf{R}(ABC)$ i $\mathbf{R}(DCB)$.

Własności czworokąta Saccheriego

1. Kąty przy górnej podstawie są przystające.
2. Prosta łącząca środki podstaw jest osią symetrii.
3. Dwa czworokąty Saccheriego przystają gdy przystają dolne podstawy i boki.
4. Podstawa górna jest nie mniejsza od dolnej.
5. Kąty przy górnej podstawie są ostre lub proste.

Twierdzenie 8. Suma dwóch kątów ostrych trójkąta prostokątnego jest nie większa od kąta prostego.

Twierdzenie 9 (Saccheriego-Legendre'a). Suma dwóch kątów wewnętrznych trójkąta jest nie większa od kąta zewnętrznego przy trzecim wierzchołku. (Suma kątów wewnętrznych trójkąta jest nie większa od kąta półpełnego.)

Twierdzenie 10. Dla dowolnych punktów niewspółliniowych A, B, C i dowolnego $\alpha \in (0, \pi)$ istnieje taki punkt D na półprostej $h(A, C)$, że $|\angle BDA| < \alpha$.

Twierdzenie 11. *W geometrii absolutnej (teorii aksjomatów $A1, \dots, A9, A11$) następujące zdania są równoważne aksjomatowi $A10$:*

- (K) Każdy kąt równoległości jest prosty.*
 - (E) Dla dowolnych: prostej a i punktu $A \notin a$, istnieje dokładnie jedna prosta przechodząca przez A , która jest rozłączna z a .*
 - (T) Suma miar kątów wewnętrznych każdego trójkąta jest równa π .*
 - (P) Każdy czworokąt Saccheriego jest prostokątem.*
 - (IT) Istnieje trójkąt o sumie miar kątów wewnętrznych równej π .*
 - (IP) Istnieje prostokąt.*
 - (IE) Istnieją: prosta a i punkt $A \notin a$, przez który przechodzi dokładnie jedna prosta rozłączna z a .*
 - (IK) Istnieje prosty kąt równoległości.*
- $A10'$ $\mathcal{B}(ABC) \wedge \mathcal{B}(CDE) \wedge \mathcal{B}(EFA) \wedge AB \equiv BC \wedge CD \equiv DE \wedge EF \equiv FA \rightarrow FA \equiv BD.$