Aksjomatyka geometrii absolutnej bezwymiarowej:

A1 $AB \equiv BA$

A2 $AB \equiv PQ \wedge AB \equiv RS \to PQ \equiv RS$

A3 $AB \equiv CC \to A = B$

A4 $\exists X(\mathcal{B}(QAX) \wedge AX \equiv BC)$ (aksjomat o odkładaniu odcinka)

A5 $(A \neq B \wedge \mathcal{B}(ABC) \wedge \mathcal{B}(A'B'C') \wedge AB \equiv A'B' \wedge BC \equiv B'C' \wedge AD \equiv A'D' \wedge BD \equiv B'D') \to CD \equiv C'D'$ (aksjomat o pięciu odcinkach)

A6 $\mathcal{B}(ABA) \to A = B$

A7 $\mathcal{B}(APC) \wedge \mathcal{B}(BQC) \to \exists X(\mathcal{B}(PXB) \wedge \mathcal{B}(QXA))$ (aksjomat Pasha)

Asjomaty wymiaru:

A8 $\exists A, B, C(\neg\mathcal{B}(ABC) \wedge \neg\mathcal{B}(BCA) \wedge \neg\mathcal{B}(CAB))$ (dolny aksjomat wymiaru)

A9 $(P \neq Q \wedge AP \equiv AQ \wedge BP \equiv BQ \wedge CP \equiv CQ) \to (\mathcal{B}(ABC) \vee \mathcal{B}(BCA) \vee \mathcal{B}(CAB))$ (górny aksjomat wymiaru)

Aksjomat Euklidesa i jego równoważna forma:

A10 $\mathcal{B}(ADT) \wedge \mathcal{B}(BDC) \wedge A \neq D \to$

$$\exists X, Y(\mathcal{B}(ABX) \wedge \mathcal{B}(ACY) \wedge \mathcal{B}(XTY))$$

$A\ 10'$ $\mathcal{B}(ABC) \wedge \mathcal{B}(CDE) \wedge \mathcal{B}(EFA) \wedge AB \equiv BC \wedge CD \equiv DE \wedge EF \equiv FA) \to FA \equiv BD$

Aksjomat ciągłości

A11 $\forall \mathcal{X}, \mathcal{Y}\{\exists A \forall X, Y[X \in \mathcal{X} \wedge Y \in \mathcal{Y} \to \mathcal{B}(AXY)] \to \exists B \forall X, Y[X \in \mathcal{X} \wedge Y \in \mathcal{Y} \to \mathcal{B}(XBY)]\}$

Definicja 1. 2-wymiarową rzeczywistą *geometrią hiperboliczną* nazywamy teorię aksjomatów $A1, ..., A9, \neg A10, A11$.

$\neg$A10 $\exists A, B, C, D, T : \mathcal{B}(ADT) \wedge \mathcal{B}(BDC) \wedge A \neq D \wedge$

$$(\forall X, Y : (\mathcal{B}(ABX) \wedge \mathcal{B}(ACY) \to \neg\mathcal{B}(XTY))$$

Definicje i oznaczenia

1. Współliniowość punktów A, B, C: $Col(ABC) :\leftrightarrow (\mathcal{B}(ABC) \vee \mathcal{B}(BCA) \vee \mathcal{B}(CAB))$
2. Prosta przechodząca przez punkty: $A \neq B$: $l(A, B) := \{X|\ Col(ABX)\}$.
3. Półprosta o początku A, przechodząca przez B: $h(A, B) := \{X| \mathcal{B}(ABX) \vee \mathcal{B}(AXB)\}$.
4. Symetralna odcinka AB ($A \neq B$): $s(A, B) := \{X|\ AX \equiv BX\}$.
5. Środek odcinka: $\mathbf{M}(A, B) = X \leftrightarrow \mathbf{B}(AXB) \wedge AX \equiv XB$.
6. Symetria środkowa: $\mathbf{S}_O(A) = A' :\leftrightarrow \mathbf{M}(A, A') = O$.

Def. Przekształcenie φ nazywamy inwolucją gdy $\varphi \circ \varphi = id$ i $\varphi \neq id$.

Tw. $\mathbf{S}_O$ jest inwolucyjną izometrią.

Definicje i oznaczenia cd.

6. Punkty A, C, B tworzą kąt prosty:

   $\mathcal{R}(ACB) :\leftrightarrow AB \equiv A\mathbf{S}_C(B)$.

7. $a \perp b :\leftrightarrow$

   $\exists A, C, B(\mathcal{R}(ACB) \wedge C \in a, b \wedge A \in a \wedge B \in b \wedge C \neq A, B)$.

8. Rzut prostokątny punktu A na prostą l:

   $\mathbf{R}_l(A) = A' :\leftrightarrow \forall X \in l(\mathcal{R}(AA'X))$.

9. Symetria osiowa: $\mathbf{S}_l(A) = A' :\leftrightarrow \mathbf{M}(A, A') = \mathbf{R}_l(A)$

Tw. $\mathbf{S}_l$ jest inwolucyjną izometrią.

Tw. Niech $A \in a, b$. Wówczas:

$a \perp b \leftrightarrow \mathbf{S}_A = \mathbf{S}_a \circ \mathbf{S}_b \leftrightarrow \mathbf{S}_b \circ \mathbf{S}_a = \mathbf{S}_a \circ \mathbf{S}_b \neq id$.

Wybrane pojęcia i twierdzenia geometrii absolutnej

Tw. [O sztywności dla prostej]: Dowolna izometria zachowująca dwa różne punkty prostej, zachowuje wszystkie punkty tej prostej.

Tw. [O sztywności dla płaszczyzny]: Dowolna izometria zachowująca trzy punkty niewspółliniowe zachowuje wszystkie punkty zawierającej je płaszczyzny (jest identycznością płaszczyzny absolutnej).

Tw. [O doskonałej jednorodności]: Jeśli $\neg Col(ABC)$ i $(ABC) \equiv (A'B'C')$, to istnieje dokładnie jedna izometria φ, która przeprowadza A, B, C odpowiednio na A', B', C'.

Wn.: Każda izometria płaszczyzny absolutnej jest złożeniem dwóch lub trzech symetrii osiowych.

Tw. [O redukcji w pęku prostych przecinających się]: Dla dowolnych trzech prostych a, b, c przechodzących przez ustalony punkt istnieje taka, współpękowa z nimi prosta d, że $\mathbf{S}_d = \mathbf{S}_c \circ \mathbf{S}_b \circ \mathbf{S}_a$.

- Porównywanie odcinków i dodawanie odcinków swobodnych

  $AB \leq CD :\leftrightarrow \exists E : AB \equiv CE \wedge \mathcal{B}(CED)$

  $AB < CD :\leftrightarrow AB \leq CD \wedge \neg AB \equiv CD$

  odcinki swobodne $[A, B]$ - klasy relacji $\equiv$

  $[A, B] + [C, D] := [E, F] \leftrightarrow \exists K, L, M : AB \equiv KL \wedge CD \equiv LM \wedge EF \equiv KM \wedge \mathcal{B}(KLM)$; $\quad \frac{1}{2}[A, B] := [A, \mathbf{M}(A, B)]$;

  Dla teorii aksjomatów $A1, ..., A9$ miara odcinka jest addytywną funkcją

  $$\mu : \mathcal{D}' \to \{\frac{n}{2^k} : \ m, k \in \mathbb{N}\}$$

  gdzie $\mathcal{D}'$ jest podzbiorem zbioru odcinków swobodnych $\mathcal{D}$.

  Po założeniu aksjomatu ciągłości $A11$ miarę rozszerzamy do funkcji $\mu : \mathcal{D} \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$.

- Leżenie w kącie. Mówimy, że P leży w kącie $\angle ABC$:

  $$I(P, \angle ABC) :\leftrightarrow \exists X : \mathcal{B}(AXC) \wedge X \in h(B, P).$$

- Porównywanie kątów:

  $$\angle ABC \leq \angle DEF :\leftrightarrow \exists P : I(P, \angle DEF) \wedge \angle ABC \equiv \angle DEP.$$

- Dodawanie kątów swobodnych. Kąty swobodne $\alpha = [\angle ABC]$, to klasy relacji przystawania kątów.

  $\alpha + \beta = \gamma :\leftrightarrow \exists A, B, C, D : \angle ABC \in \alpha \wedge \angle CBD \in \beta \wedge \angle ABD \in \gamma \wedge (I(C, \angle ABD) \vee I(\mathbf{S}_B(C), ABD))$ Dla teorii aksjomatów $A1, ..., A9, A11$ miara kąta jest addytywną funkcją

  $$\nu : \mathcal{K} \to [0, \pi)$$

  gdzie $\mathcal{K}$ jest zbiorem kątów swobodnych.

Dla skierowanych kątów swobodnych miarę można przedłużyć do przedziału $[0, 2\pi)$.

- Dla półprostych a, b, c o wspólnym początku O stosujemy oznaczenia:

  $\angle ab$ - kąt pomiędzy półprostymi a, b,

  $a^* := \mathbf{S}_O(a)$ - półprosta uzupełniająca,

  $\mathbf{M}(a, b)$ - dwusieczna kąta $\angle ab$,

  $\mathcal{B}(abc)$, gdy półprosta b leży w kącie $\angle ac$,

- Cechy przystawania trójkątów: (bbb), (bkb), (kbk).

- Półpłaszczyznę (domkniętą) wyznaczoną przez prostą a i punkt $P \notin a$ oznaczamy $Hp(a, P)$.

Twierdzenie 1 (O kącie zewnętrznym)**.** $\neg Col(ABC) \wedge \mathcal{B}(BAD) \wedge A \neq D \to \angle ACB, \angle ABC < \angle CAD$ *(kąt zewnętrzny w trójkącie jest większy od każdego z kątów wewnętrznych przy pozostałych wierzchołkach).*

Twierdzenie 2. *W dowolnym trójkącie ABC*

1. $AB \equiv AC \leftrightarrow \angle ACB \equiv \angle ABC$

2. $AB < AC \leftrightarrow \angle ACB < \angle ABC$

Wn. 1. *Dwie proste przecinające daną prostą pod tym samym kątem skierowanym są rozłączne.*

Wn. 2. *Jeśli dwie proste mają wspólną prostopadłą, to są rozłączne.*

Twierdzenie 3. *Niech $AB \equiv A'B'$ i $BC \equiv B'C'$. Wówczas $AC > A'C'$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\angle ABC > \angle A'B'C'$.*

Definicja 2. Mówimy, że półprosta $b = h(B, B')$ jest *równoległa* do półprostej $a = h(A, A')$, gdy:

1. $a \subset b$ lub $b \subset a$ lub

2. a, b leżą po tej samej stronie prostej $l(A, B)$ i w pęku o wierzchołku B uporządkowanym od $h(B, A)$ do $h^*(B, A)$, b jest pierwszą, która nie przecina a.

Twierdzenie 4. *Relacja równoległości półprostych jest relacją równoważności.*

Definicja 3. Dwie proste są *równoległe*, gdy zawierają równoległe półproste. Prosta jest równoległa do półprostej gdy zawiera równoległą do niej półprostą.

Uwaga 1. Równoległość prostych nie jest relacją równoważności.

Kąt równoległości

Definicja 4. Dla dowolnej prostej a i dowolnego punktu $A \notin a$ *kątem równoległości* nazywamy kąt:

$$\angle Aa := \angle bc,$$

gdzie $b = h(A\mathbf{R}_a(A))$ i $c = h(A, A') \parallel a$.

Wn. 3. *Kąt równoległości jest nie większy od kąta prostego.*

Twierdzenie 5. *Jeżeli $A_1 \notin a_1$, $A_2 \notin a_2$, $B_1 = \mathbf{R}_{a_1}(A_1)$, $B_2 = \mathbf{R}_{a_2}(A_2)$, to*

1. $A_1B_1 \equiv A_2B_2 \to \angle A_1a_1 \equiv \angle A_2a_2$

2. $A_1B_1 < A_2B_2 \to \angle A_1a_1 \geq \angle A_2a_2$

Twierdzenie 6 (Archimedesa)**.**

$$\forall A, B, C, D(A \neq B \to \exists n \in \mathbb{N} : \ n[A, B] > [C, D]).$$

Twierdzenie 7. *Jeśli istnieje prosty kąt równoległości, to każdy kąt równoległości jest prosty.*

Definicja 5. *Czworokątem Saccheriego* nazywamy czwórkę punktów A, B, C, D, takich że A, D leżą po tej samej stronie prostej $l(B, C)$, $AB \equiv CD$, $\mathbf{R}(ABC)$ i $\mathbf{R}(DCB)$.

Własności czworokąta Saccheriego

1. Kąty przy górnej podstawie są przystające.

2. Prosta łącząca środki podstaw jest osią symetrii.

3. Dwa czworokąty Saccheriego przystają gdy przystają dolne podstawy i boki.

4. Podstawa górna jest nie mniejsza od dolnej.

5. Kąty przy górnej podstawie są ostre lub proste.

Twierdzenie 8. *Suma dwóch kątów ostrych trójkąta prostokątnego jest nie większa od kąta prostego.*

Twierdzenie 9 (Saccheriego-Legendre'a)**.** *Suma dwóch kątów wewnętrznych trójkąta jest nie większa od kąta zewnętrznego przy trzecim wierzchołku.(Suma kątów wewnętrznych trójkąta jest nie większa od kąta półpełnego.)*

Twierdzenie 10. *Dla dowolnych punktów niewspółliniowych A, B, C i dowolnego $\alpha \in (0, \pi)$ istnieje taki punkt D na półprostej $h(A, C)$, że $|\angle BDA| < \alpha$.*

Twierdzenie 11. *W geometrii absolutnej (teorii aksjomatów $A1, ..., A9, A11$) następujące zdania są równoważne aksjomatowi $A10$:*

(K) *Każdy kąt równoległości jest prosty.*

(E) *Dla dowolnych: prostej a i punktu $A \notin a$, istnieje dokładnie jedna prosta przechodząca przez A, która jest rozłączna z a.*

(T) *Suma miar kątów wewnętrznych każdego trójkąta jest równa π.*

(P) *Każdy czworokąt Saccheriego jest prostokątem.*

(IT) *Istnieje trójkąt o sumie miar kątów wewnętrznych równej π.*

(IP) *Istnieje prostokąt.*

(IE) *Istnieją: prosta a i punkt $A \notin a$, przez który przechodzi dokładnie jedna prosta rozłączna z a.*

(IK) *Istnieje prosty kąt równoległości.*

A10' $\mathcal{B}(ABC) \wedge \mathcal{B}(CDE) \wedge \mathcal{B}(EFA) \wedge AB \equiv BC \wedge CD \equiv DE \wedge EF \equiv FA) \rightarrow FA \equiv BD$.