Lista zadań z geometrii. Nr 3

1. Określić jakie przekształcenia opisują dane wzory. Dla obrotu określić środek i kąt, dla symetrii z poślizgiem oś i wektor translacji itp.:

   (a) $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$; (c) $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \sqrt{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$;
   (d) $\varphi(z) = -\overline{z} + 2$, (e) $\varphi(z) = -\overline{z} + 2i$; (f) $\varphi(z) = i \cdot \overline{z}$; (g) $\varphi(z) = i \cdot z + 2i$; (h) $\varphi(z) = (\sqrt{2} + \sqrt{2}i) \cdot \overline{z}$.

2. Podać postać analityczną następujących przekształceń płaszczyzny:

   (a) $\mathbf{R}_A^\alpha$ gdzie $A = (1, -1)$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$. (b) Symetrii dylatacyjnej o osi $x + y = 1$, środku $(0, 1)$ i skali 2. (c) Podobieństwa spiralnego o kącie obrotu $\frac{\pi}{4}$, skali $\sqrt{2}$ i środku $(2, 1)$.

3. Niech A będzie macierzą ortogonalną symetryczną stopnia 3. Wykazać, że:

   (a) jeśli $A \neq -J$ i $\det A = -1$, to A jest macierzą symetrii względem płaszczyzny,
   (b) jeśli $A \neq J$ i $\det A = 1$, to A jest macierzą półobrotu (symetrii względem prostej).
   (c) Jakie są wartości własne tych macierzy?

4. Korzystając z własności grupy izometrii przestrzeni udowodnić, że każda ortogonalna macierz stopnia 3 jest iloczynem dwóch ortogonalnych macierzy symetrycznych.

5. Niech $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & -8 & -4 \\ -8 & 1 & -4 \\ -4 & -4 & 7 \end{bmatrix}$. Wykazać, że A jest macierzą obrotu, B macierzą symetrii obrotowej, a C symetrii względem płaszczyzny. Wyznaczyć osie i kąty obrotu (dla A i B), oraz płaszczyzny symetrii (dla B i C).

6. Wykazać, że promień okręgu Eulera (dziewięciu punktów) jest równy połowie promienia okręgu opisanego na trójkącie, a jego środek pokrywa się ze środkiem odcinka łączącego ortocentrum ze środkiem okręgu opisanego.

7. Wykazać, że okrąg Eulera trójkąta równoramiennego jest styczny do jednego z boków, a okrąg Eulera trójkąta prostokątnego zawiera jeden z jego wierzchołków.

8. Skonstruować trójkąt równoramienny ABC mając daną jego podstawę AB i promień jego okręgu Eulera $r_9 = \frac{1}{3}|AB|$.

9. Dany jest okrąg ω z cięciwą CD, która nie jest średnicą. Skonstruować trójkąt prostokątny ABC, którego okręgiem Eulera jest ω, a jeden z boków zawiera cięciwę CD.

10. Dany jest trójkąt ABC oraz punkty $C' = \mathbf{J}_B^2(A)$, $B' = \mathbf{M}(A, C)$. W jakim stosunku prosta $C'B'$ dzieli bok BC?

11. Dany jest trójkąt ABC oraz punkty $C' = \mathbf{S}_B(A)$, $B' = \mathbf{J}_C^{-2}(A)$. Proste BB', CC' przecinają się w punkcie P. W jakim stosunku prosta AP dzieli bok BC?

12. Udowodnić, że proste łączące punkty styczności okręgu wpisanego w dowolny trójkąt z przeciwległymi wierzchołkami są współpękowe.

13. Udowodnić następujące twierdzenie o dwusiecznych: Jeśli D jest punktem przecięcia dwusiecznej kąta $\angle ACB$ z bokiem AB trójkąta ABC, a D' jest punktem przecięcia dwusiecznej kąta zewnętrznego przy wierzchołku C z prostą AB to $\frac{|AD|}{|BD|} = \frac{|AD'|}{|BD'|} = \frac{|AC|}{|BC|}$.

14. Udowodnić, że spodki dwusiecznych kątów wewnętrznych przy wierzchołkach A i B trójkąta ABC i punkt przecięcia dwusiecznej kąta zewnętrznego przy wierzchołku C z prostą $l(A, B)$ leżą na jednej prostej (lub dwusieczna kąta zewnętrznego jest równoległa do $l(A, B)$).