Lista zadań z geometrii. Nr 2

1. Punkt O nazywamy środkiem symetrii figury $\mathcal{F}$ gdy $\mathbf{S}_O(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$, prostą l nazywamy osią symetrii gdy $\mathbf{S}_l(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$. Udowodnić, że:

   (a) jeśli figura ma dokładnie dwie osie symetrii to ma również środek symetrii,

   (b) jeśli figura ma dwa środki symetrii, to ma ich nieskończenie wiele.

2. Zakładamy, że $A \neq B$. Jakim przekształceniem jest złożenie:

   a) $\mathbf{J}_B^2 \circ \mathbf{J}_A^{\frac{1}{2}}$, b) $\mathbf{J}_B^{-2} \circ \mathbf{J}_A^{\frac{1}{2}}$, c) $\mathbf{J}_B^4 \circ \mathbf{J}_A^{\frac{1}{2}}$, d) $\mathbf{J}_A^2 \circ \mathbf{T}_{\vec{u}}$, e) $\mathbf{J}_B^2 \circ \mathbf{S}_A$, f) $\mathbf{S}_A \circ \mathbf{J}_B^2 \circ \mathbf{S}_A$?

3. W dowolny trójkąt ABC wpisać kwadrat w ten sposób, że dwa wierzchołki kwadratu leżą na boku AB, a dwa pozostałe na bokach BC i AC. Wsk.: Wykorzystać jednokładność.

4. Punkty A', B', C', D' są odpowiednio środkami boków AB, BC, CD, DA kwadratu. Jakiego rodzaju podobieństwo przeprowadza $ABCD$ na $A'B'C'D'$? Wyznaczyć jego środek i skalę. Zapisać w postaci złożenia izometrii z jednokładnością.

5. Punkty M i N są odpowiednio środkami boków AB i CD prostokąta $ABCD$. Przy jakim stosunku $|AB| : |BC|$ prostokąty $ABCD$ i $ADNM$ są podobne? Jakiego rodzaju podobieństwo przeprowadza $ABCD$ w $ADNM$? Zapisać je w postaci złożenia izometrii z jednokładnością.

6. Wysokość CH poprowadzona z wierzchołka kąta prostego trójkąta prostokątnego ABC dzieli trójkąt na dwa trójkąty do niego podobne ACH i CBH. Dla każdej pary trójkątów określić rodzaj podobieństwa, znaleźć jego środek i kąt obrotu w przypadku podobieństwa spiralnego oraz oś w przypadku symetrii dylatacyjnej.

7. Prosta a przecina płaszczyznę Π pod kątem $45°$. Określić jakimi przekształceniami są:
   a) $\mathbf{S}_a \circ \mathbf{S}_\Pi$; b) $\mathbf{S}_\Pi \circ \mathbf{S}_a \circ \mathbf{S}_\Pi$; c) $\mathbf{S}_a \circ \mathbf{S}_\Pi \circ \mathbf{S}_a$; d) $\mathbf{S}_a \circ \mathbf{S}_\Pi \circ \mathbf{S}_a \circ \mathbf{S}_\Pi$.

8. Niech φ będzie dowolną izometrią przestrzeni. Jakimi przekształceniami są:
   a) $\varphi \circ \mathbf{S}_\Pi \circ \varphi^{-1}$; b) $\varphi \circ \mathbf{T}_{\vec{u}} \circ \mathbf{R}_l^\alpha \circ \varphi^{-1}$, gdzie $\vec{u} \parallel l$.

9. Jak dobrać proste a, b, aby złożenie $\mathbf{S}_a \circ \mathbf{S}_b$ było:
   a) translacją; b) symetrią osiową; c) obrotem?

10. Opisać jakim przekształceniem jest złożenie $\mathbf{S}_\Pi \circ \mathbf{S}_\Phi \circ \mathbf{S}_\Psi \circ \mathbf{S}_\Pi \circ \mathbf{S}_\Phi \circ \mathbf{S}_\Psi$, gdy

    (a) płaszczyzny Π, Φ, Ψ są współpękowe,

    (b) $|\Pi \cap \Phi \cap \Psi| = 1$ (mają dokładnie jeden punk wspólny),

    (c) $\Pi \cap \Phi \cap \Psi = \emptyset$, ale Π, Φ, Ψ nie są współpękowe.

11. Sześcian $ABCDEFGH$ określa: $a := l(A, B)$, $b := l(F, G)$, $\Pi := Pl(A, B, C)$, $\Phi := Pl(E, F, G)$ i $\Psi := Pl(B, C, E)$. Doprowadzić do najprostszej postaci i sklasyfikować dane złożenia: a) $\mathbf{S}_a \circ \mathbf{S}_\Pi \circ \mathbf{S}_b$; b) $\mathbf{S}_a \circ \mathbf{S}_A \circ \mathbf{S}_\Psi$; c) $\mathbf{S}_a \circ \mathbf{S}_\Psi$; d) $\mathbf{S}_b \circ \mathbf{S}_\Psi$; e) $\mathbf{S}_a \circ \mathbf{S}_\Psi \circ \mathbf{S}_b \circ \mathbf{S}_\Psi$; f) $\mathbf{S}_\Phi \circ \mathbf{S}_b \circ \mathbf{S}_\Psi \circ \mathbf{S}_\Phi \circ \mathbf{S}_\Psi$.

    Opisać grupy generowane przez: a) $\{\mathbf{S}_a, \mathbf{S}_\Pi\}$, b) $\{\mathbf{S}_A, \mathbf{S}_\Pi\}$, c) $\{\mathbf{S}_a, \mathbf{S}_A, \mathbf{S}_\Pi\}$.

12. Czy złożenie obrotu i symetrii środkowej może mieć jako zbiór punktów stałych:
    (1) $\emptyset$; (2) zbiór jednoelementowy; (3) prostą; (4) płaszczyznę; (5) całą przestrzeń?

13. Określić zbiory prostych i płaszczyzn niezmienniczych dla wszystkich typów izometrii.

14. Opisać grupy generowane przez:

    (a) $\{\mathbf{S}_\Psi, \mathbf{S}_\Phi\}$, gdy płaszczyzny Φ, Ψ przecinają się pod kątem $30°$.

    (b) $\{\mathbf{S}_a, \mathbf{S}_b\}$, gdy proste a, b przecinają się pod kątem $45°$.

    (c) $\{\mathbf{S}_\Pi, \mathbf{S}_\Psi, \mathbf{S}_\Phi\}$, gdy $\Pi \perp \Phi, \Psi$ i płaszczyzny Φ, Ψ przecinają się pod kątem $60°$.

    Grupy opisane w (a) i (c) są pełnymi grupami izometrii własnych pewnych brył, a grupa z (b) jest grupą obrotów pewnej bryły. Wskazać te bryły.

15. Opisać grupę izometrii własnych czworościanu foremnego.