Lista zadań z geometrii. Nr 1

1. Korzystając z aksjomatów Tarskiego A1,A2 udowodnić, że relacja przystawania odcinków (nieuporządkowanych par punktów) jest relacją równoważności.

2. Korzystając z A3 i A4 udowodnić: (a) $AA \equiv BB$; (b) $\mathcal{B}(ABB)$.

3. Korzystając z poprzedniego zadania oraz A6 i A7 udowodnić:

   (a) $\mathcal{B}(ABC) \Rightarrow \mathcal{B}(CBA)$;

   (b) $\mathcal{B}(ABC) \wedge \mathcal{B}(BAC) \Rightarrow A = B$;

   (c) $\mathcal{B}(ABD) \wedge \mathcal{B}(BCD) \Rightarrow \mathcal{B}(ABC)$.

4. Korzystając z A3 i A5: $A \neq B \wedge \mathrm{AFS}\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{pmatrix} \to CD \equiv C'D'$ udowodnić:

   (a) $\mathcal{B}(ABC) \wedge \mathcal{B}(A'B'C') \wedge AB \equiv A'B' \wedge BC \equiv B'C' \Rightarrow AC \equiv A'C'$ (składanie odcinków);

   (b) $Q \neq A \Rightarrow \exists X!(\mathcal{B}(QAX) \wedge AX \equiv BC)$ (jednoznaczność odkładania odcinka);

5. Traktując dowolny n-kąt jako zbiór jego wierzchołków zdefiniować w języku Tarskiego (używając też skrótu $Col(ABC)$): a) trójkąt prostokątny; b) trójkąt prostokątny równoramienny; c) czworokąt wypukły; d) romb; e) równoległobok; f) prostokąt; g) kwadrat; h) trapez; i) dowolny n-kąt foremny.

6. Używając tylko relacji $\mathcal{B}$ zdefiniować trójkąt ABC jako zbiór punktów (składający się z wierzchołków, brzegu i wnętrza).

7. Określić jakimi izometriami są: a) $\mathbf{R}_A^\alpha \circ \mathbf{R}_B^\beta$ w zależności od miar α, β i położenia punktów A, B; b) $\mathbf{T}_{\vec{u}} \circ \mathbf{R}_A^\alpha$; c) $\mathbf{S}_C \circ \mathbf{S}_B \circ \mathbf{S}_A$; d) $\mathbf{S}_k \circ \mathbf{S}_l \circ \mathbf{S}_k$; e) $\mathbf{R}_A^\alpha \circ \mathbf{S}_l$; f) $\mathbf{S}_m \circ \mathbf{S}_l \circ \mathbf{S}_k \circ \mathbf{S}_m \circ \mathbf{S}_l \circ \mathbf{S}_k$.

8. $A \in a, b$; $a \perp b$; $\vec{u} \parallel a$. Doprowadzić do najprostszej postaci:
   a) $\mathbf{S}_a \circ \mathbf{T}_{\vec{u}} \circ \mathbf{S}_b$; b) $\mathbf{S}_A \circ \mathbf{S}_b \circ \mathbf{T}_{\vec{u}}$; c) $\mathbf{S}_A \circ \mathbf{T}_{\vec{u}} \circ \mathbf{S}_b$; d) $\mathbf{S}_a \circ \mathbf{R}_A^{90^\circ} \circ \mathbf{S}_b$; e) $\mathbf{S}_A \circ \mathbf{R}_A^{90^\circ} \circ \mathbf{S}_b$; f) $\mathbf{S}_A \circ \mathbf{S}_a^{\vec{u}}$.

9. Które ze zbiorów izometrii tworzą grupy:
   a) Obroty, b) Translacje, c) Obroty i translacje, d) Obroty zachowujące dany punkt A, e) Izometrie zachowujące dany punkt A, f) Translacje i symetrie środkowe, g) Izometrie zachowujące daną prostą a. Określić z jakich przekształceń składają się zbiory z pkt. e) i g).

10. Które z grup określonych w zad. 9 są dzielnikami normalnymi grupy izometrii płaszczyzny.

11. Scharakteryzować grupy generowane przez dane zbiory izometrii wypisując wszystkie ich przekształcenia: a) $\{\mathbf{T}_{\vec{u}}\}$ gdzie $\vec{u} \neq \theta$; b) $\{\mathbf{T}_{\vec{u}}, \mathbf{S}_A\}$; c) $\{\mathbf{S}_a, \mathbf{S}_b\}$ gdzie $a \parallel b$; d) $\{\mathbf{S}_a, \mathbf{S}_b\}$ gdzie $a \nparallel b$ określić przy jakim założeniu grupa ta jest nieskończona; e) $\{\mathbf{S}_A, \mathbf{S}_B\}$ gdzie $A \neq B$; f) $\{\mathbf{S}_l^{\vec{u}}\}$; g) $\{\mathbf{S}_A, \mathbf{S}_b\}$ gdzie $A \notin b$.

12. Dane są okrąg ω, prosta a i punkt M. Wyznaczyć takie punkty $A \in a$ i $B \in \omega$, że M jest środkiem odcinka AB. Określić ilość rozwiązań w zależności od położenia a, ω i M.

13. Dany jest trójkąt równoboczny i punkt M we wnętrzu tego trójkąta. Wyznaczyć takie punkty A i B leżące na bokach trójkąta, że M jest środkiem odcinka AB. Określić ilość rozwiązań w zależności od położenia punktu M.

14. Punkty A, B leżą po tej samej stronie prostej a. Wyznacz punkt $C \in a$, dla którego suma $|AC| + BC|$ jest najmniejsza.

15. Punkt K leży na boku AB trójkąta ostrokątnego ABC. Wyznaczyć punkty L na boku BC i M na boku CA, dla których trójkąt KLM ma najmniejszy obwód.

16. Trójkąty równoboczne ABC i BDE są opisane przeciwnie do ruchu wskazówek zegara. Wykazać, że punkt B i środki odcinków AE i CD tworzą trójkąt równoboczny (lub pokrywają się).

17. Dane sa proste równoległe b, c i punkt $A \notin b, c$. Skonstruować trójkąt równoboczny ABC, gdzie $B \in b$ i $C \in c$.

Wsk. W zad. 12, 13 wykorzystać symetrię środkową, w zad. 14, 15 symetrie osiowe, a w zad. 16, 17 obrót o 60°.