

Lista zadań z geometrii. Nr 2

- Zakładamy, że $A \neq B$. Jakim przekształceniem jest złożenie:
 - $\mathbf{J}_B^2 \circ \mathbf{J}_A^{\frac{1}{2}}$, b) $\mathbf{J}_B^{-2} \circ \mathbf{J}_A^{\frac{1}{2}}$, c) $\mathbf{J}_B^4 \circ \mathbf{J}_A^{\frac{1}{2}}$, d) $\mathbf{J}_A^2 \circ \mathbf{T}_{\vec{u}}$, e) $\mathbf{J}_B^2 \circ \mathbf{S}_A$, f) $\mathbf{S}_A \circ \mathbf{J}_B^2 \circ \mathbf{S}_A$?
- W dowolny trójkąt ABC wpisać kwadrat w ten sposób, że dwa wierzchołki kwadratu leżą na boku AB , a dwa pozostałe na bokach BC i AC . Wsk.: Wykorzystać jednokładność.
- Punkty A', B', C', D' są odpowiednio środkami boków AB, BC, CD, DA kwadratu. Jakiego rodzaju podobieństwo przeprowadza $ABCD$ na $A'B'C'D'$? Wyznaczyć jego środek i skalę. Zapisać w postaci złożenia izometrii z jednokładnością.
- Punkty M i N są odpowiednio środkami boków AB i CD prostokąta $ABCD$. Przy jakim stosunku $|AB| : |BC|$ prostokąty $ABCD$ i $ADNM$ są podobne? Jakiego rodzaju podobieństwo przeprowadza $ABCD$ w $ADNM$? Zapisać je w postaci złożenia izometrii z jednokładnością.
- Wysokość CH poprowadzona z wierzchołka kąta prostego trójkąta prostokątnego ABC dzieli trójkąt na dwa trójkąty do niego podobne ACH i CBH . Dla każdej pary trójkątów określić rodzaj podobieństwa, znaleźć jego środek i kąt obrotu w przypadku podobieństwa spiralnego oraz oś w przypadku symetrii dylatacyjnej.
- Prosta a przecina płaszczyznę Π pod kątem 45° . Określić jakimi przekształceniami są:
 - $\mathbf{S}_a \circ \mathbf{S}_\Pi$; b) $\mathbf{S}_\Pi \circ \mathbf{S}_a \circ \mathbf{S}_\Pi$; c) $\mathbf{S}_a \circ \mathbf{S}_\Pi \circ \mathbf{S}_a$; d) $\mathbf{S}_a \circ \mathbf{S}_\Pi \circ \mathbf{S}_a \circ \mathbf{S}_\Pi$.
- Niech φ będzie dowolną izometrią przestrzeni. Jakimi przekształceniami są:
 - $\varphi \circ \mathbf{S}_\Pi \circ \varphi^{-1}$; b) $\varphi \circ \mathbf{T}_{\vec{u}} \circ \mathbf{R}_l^\alpha \circ \varphi^{-1}$.
- Jak dobrać proste a, b , aby złożenie $\mathbf{S}_a \circ \mathbf{S}_b$ było:
 - translacją; b) symetrią osiową; c) obrotem?
- Opisać jakim przekształceniem jest złożenie $\mathbf{S}_\Pi \circ \mathbf{S}_\Phi \circ \mathbf{S}_\Psi \circ \mathbf{S}_\Pi \circ \mathbf{S}_\Phi \circ \mathbf{S}_\Psi$, gdy
 - płaszczyzny Π, Φ, Ψ są współpękowe,
 - $|\Pi \cap \Phi \cap \Psi| = 1$ (mają dokładnie jeden punkt wspólny),
 - $\Pi \cap \Phi \cap \Psi = \emptyset$, ale Π, Φ, Ψ nie są współpękowe.
- Proste a, b zawierają krawędzie przechodzące przez wierzchołek B sześciianu, proste a', b' zawierają odpowiednio krawędzie do nich przeciwległe, $\Phi := Pl(a, b)$, $\Psi := Pl(a', b')$, $\Omega := Pl(b, b')$. Określić jakimi przekształceniami są:
 - $\mathbf{S}_a \circ \mathbf{S}_{a'}$; b) $\mathbf{S}_b \circ \mathbf{S}_{a'}$; c) $\mathbf{S}_a \circ \mathbf{S}_\Omega$; d) $\mathbf{S}_b \circ \mathbf{S}_a \circ \mathbf{S}_B$; e) $\mathbf{S}_\Psi \circ \mathbf{S}_\Omega \circ \mathbf{S}_\Phi$ f) $\mathbf{S}_{b'} \circ \mathbf{S}_\Omega \circ \mathbf{S}_\Phi$.

Opisać grupy generowane przez: a) $\{\mathbf{S}_a, \mathbf{S}_\Phi\}$, b) $\{\mathbf{S}_B, \mathbf{S}_\Phi\}$, c) $\{\mathbf{S}_a, \mathbf{S}_B\}$, d) $\{\mathbf{S}_a, \mathbf{S}_B, \mathbf{S}_\Phi\}$.
- Czy złożenie obrotu i symetrii środkowej może mieć jako zbiór punktów stałych:
 - $\emptyset$; (2) zbiór jednoelementowy; (3) prostą; (4) płaszczyznę; (5) całą przestrzeń?
- Określić zbiory prostych i płaszczyzn niezmienniczych dla wszystkich typów izometrii.
- Opisać grupy generowane przez:
 - $\{\mathbf{S}_\Psi, \mathbf{S}_\Phi\}$, gdy płaszczyzny Φ, Ψ przecinają się pod kątem 30° .
 - $\{\mathbf{S}_a, \mathbf{S}_b\}$, gdy proste a, b przecinają się pod kątem 45° .
 - $\{\mathbf{S}_\Pi, \mathbf{S}_\Psi, \mathbf{S}_\Phi\}$, gdy $\Pi \perp \Phi, \Psi$ i płaszczyzny Φ, Ψ przecinają się pod kątem 60° .

Grupy opisane w (a) i (c) są pełnymi grupami izometrii własnych pewnych brył, a grupa z (b) jest grupą obrotów pewnej bryły. Wskazać te bryły.
- Opisać grupę izometrii własnych czworościanu foremnego.