

Lista zadań z geometrii. Nr 1

- Korzystając z aksjomatów Tarskiego A1, A2 udowodnić, że relacja przystawiania odcinków (nieuporządkowanych par punktów) jest relacją równoważności.
- Korzystając z A3 i A4 udowodnić: (a) $AA \equiv BB$; (b) $\mathcal{B}(ABB)$.
- Korzystając z poprzedniego zadania oraz A6 i A7 udowodnić:
 - $\mathcal{B}(ABC) \Rightarrow \mathcal{B}(CBA)$;
 - $\mathcal{B}(ABC) \wedge \mathcal{B}(BAC) \Rightarrow A = B$;
 - $\mathcal{B}(ABD) \wedge \mathcal{B}(BCD) \Rightarrow \mathcal{B}(ABC)$.
- Korzystając z A3 i A5: $A \neq B \wedge \text{AFS} \left(\begin{array}{cccc} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{array} \right) \rightarrow CD \equiv C'D'$ udowodnić:
 - $\mathcal{B}(ABC) \wedge \mathcal{B}(A'B'C') \wedge AB \equiv A'B' \wedge BC \equiv B'C' \Rightarrow AC \equiv A'C'$ (składanie odcinków);
 - $Q \neq A \Rightarrow \exists X!(\mathcal{B}(QAX) \wedge AX \equiv BC)$ (jednoznaczność odkładania odcinka);
- Traktując dowolny n -ką jako zbiór jego wierzchołków zdefiniować w języku Tarskiego (używając też skrótu $Col(ABC)$): a) trójkąt prostokątny; b) trójkąt prostokątny równoramienny; c) czworokąt wypukły; d) romb; e) równoległobok; f) prostokąt; g) kwadrat; h) trapez; i) dowolny n -ką foremny.
- Używając tylko relacji $\mathcal{B}$ zdefiniować trójkąt ABC jako zbiór punktów (składający się z wierzchołków, brzegu i wnętrza).
- Określić jakimi izometriami są: a) $\mathbf{R}_A^\alpha \circ \mathbf{R}_B^\beta$ w zależności od miar α, β i położenia punktów A, B ; b) $\mathbf{T}_{\vec{u}} \circ \mathbf{R}_A^\alpha$; c) $\mathbf{S}_C \circ \mathbf{S}_B \circ \mathbf{S}_A$; d) $\mathbf{S}_k \circ \mathbf{S}_l \circ \mathbf{S}_k$; e) $\mathbf{R}_A^\alpha \circ \mathbf{S}_l$; f) $\mathbf{S}_m \circ \mathbf{S}_l \circ \mathbf{S}_k \circ \mathbf{S}_m \circ \mathbf{S}_l \circ \mathbf{S}_k$.
- $A \in a, b; a \perp b; \vec{u} \parallel a$. Doprowadzić do najprostszej postaci:
 - $\mathbf{S}_a \circ \mathbf{T}_{\vec{u}} \circ \mathbf{S}_b$;
 - $\mathbf{S}_A \circ \mathbf{S}_b \circ \mathbf{T}_{\vec{u}}$;
 - $\mathbf{S}_A \circ \mathbf{T}_{\vec{u}} \circ \mathbf{S}_b$;
 - $\mathbf{S}_a \circ \mathbf{R}_A^{90^\circ} \circ \mathbf{S}_b$;
 - $\mathbf{S}_A \circ \mathbf{R}_A^{90^\circ} \circ \mathbf{S}_b$;
 - $\mathbf{S}_A \circ \mathbf{S}_a^{\vec{u}}$.
- Które ze zbiorów izometrii są podgrupami, a które dzielnikami normalnymi grupy izometrii płaszczyzny:
 - Obroty,
 - Translacje,
 - Obroty i translacje,
 - Obroty zachowujące dany punkt A ,
 - Izometrie zachowujące dany punkt A ,
 - Translacje i symetrie środkowe,
 - Izometrie zachowujące daną prostą a .Określić z jakich przekształceń składają się zbiory z pkt. e) i g).
- Scharakteryzować grupy generowane przez dane zbiory izometrii wypisując wszystkie ich przekształcenia:
 - $\{\mathbf{T}_{\vec{u}}\}$ gdzie $\vec{u} \neq \theta$;
 - $\{\mathbf{T}_{\vec{u}}, \mathbf{S}_A\}$;
 - $\{\mathbf{S}_a, \mathbf{S}_b\}$ gdzie $a \parallel b$;
 - $\{\mathbf{S}_a, \mathbf{S}_b\}$ gdzie $a \nparallel b$ określić przy jakim założeniu grupa ta jest nieskończona;
 - $\{\mathbf{S}_A, \mathbf{S}_B\}$ gdzie $A \neq B$;
 - $\{\mathbf{S}_l^{\vec{u}}\}$;
 - $\{\mathbf{S}_A, \mathbf{S}_b\}$ gdzie $A \notin b$.
- Wykazać, że jeśli figura płaska ma dokładnie dwie różne osie symetrii, to są one prostopadłe.
- Wykazać, że jeśli figura płaska ma dwa różne środki symetrii, to ma ich nieskończenie wiele.
- Dane są dwa punkty we wnętrzu kąta. Skonstruować równoległobok, w którym punkty te są przeciwległymi wierzchołkami, a pozostałe wierzchołki leżą na ramionach kąta.
- Dany jest trójkąt równoboczny i punkt M we wnętrzu tego trójkąta. Wyznaczyć takie punkty A i B leżące na bokach trójkąta, że M jest środkiem odcinka AB . Określić ilość rozwiązań w zależności od położenia punktu M .
- Punkt $M \neq C$ leży na dwusiecznej kąta zewnętrznego przy wierzchołku C trójkąta ABC . Wykazać, że $|MA| + |MB| > |CA| + |CB|$.
- Punkt K leży na boku AB trójkąta ostrokątnego ABC . Wyznaczyć punkty: L na boku BC i M na boku CA , dla których trójkąt KLM ma najmniejszy obwód.
- Trójkąty równoboczne ABC i BDE są opisane przeciwnie do ruchu wskazówek zegara. Wykazać, że punkt B i środki odcinków AE i CD tworzą trójkąt równoboczny (lub pokrywają się).

Wsk. W zad. 13, 14 wykorzystać symetrię środkową, w zad. 15, 16 symetrie osiowe, a w zad. 17 obrót o 60° .