Wzór Eulera

Def. 1. *Mapą spójną* $MS_{w,k,s}$ nazywamy układ w - punktów (wierzchołków), k - odcinków (krawędzi) i s - obszarów spójnych (ścian) spełniający warunki:

1. zbiór punktów pokrywa się ze zbiorem końców odcinków,
2. dowolne dwa punkty można połączyć łamaną,
3. odcinki układu mogą mieć wspólne tylko końce,
4. obszary, to wszystkie części, na które płaszczyznę dzieli suma odcinków.

Twierdzenie 1 (Wzór Eulera)**.** *Dla dowolnej mapy spójnej* $MS_{w,k,s}$ *zachodzi:*

$$w - k + s = 2.$$

Def. 2. Bryłą wypukłą nazywamy dowolny obszar przestrzeni, który wraz z dowolnymi punktami A, B zawiera wszystkie punkty X, takie że $\mathcal{B}(AXB)$ (odcinek domknięty o końcach A, B).

Twierdzenie 2. *Część wspólna dowolnej rodziny brył wypukłych jest bryłą wypukłą.*

Stwierdzenie 1. Dowolna półprzestrzeń (półprzestrzeń domknięta) jest bryłą wypukłą.

Def. 3. *Wielościanem wypukłym* nazywamy część wspólną skończonej ilości domkniętych półprzestrzeni, o ile nie zawiera ona półprostej.

Def. 4. *Narożem* nazywamy część wspólną skończonej ilości domkniętych półprzestrzeni wyznaczonych przez płaszczyzny przechodzące przez ustalony punkt, o ile nie zawiera ona prostej.

Diagram Schlegela

Def. 5. Niech $W = \bigcap_{i=1}^{n} HP_i$ będzie wielościanem wypukłym, HP_1^* będzie domkniętą półprzestrzenią uzupełniającą półprzestrzeni HP_1 i $\Pi = HP_1 \cap HP_1^*$. *Diagramem Schlegela* wielościanu W nazywamy obraz brzegu wielościanu w rzucie środkowym o środku S na płaszczyznę Π, gdy środek rzutu S leży we wnętrzu zbioru $HP_1^* \cap \bigcap_{i=2}^{n} HP_i$.

Stwierdzenie 2. Diagram Schlegela dowolnego wielościanu wypukłego jest mapą spójną, która ma tyle samo wierzchołków, krawędzi i ścian, co rzutowany wielościan.

Wn. 1. *Dla dowolnego wielościanu wypukłego zachodzi wzór Eulera.*

Def. 6. 1. Wielościan wypukły nazywamy *regularnym*, gdy każda jego ściana ma tyle samo wierzchołków (krawędzi) i każde naroże ma tę samą ilość ścian (krawędzi).

2. Wielościan regularny nazywamy *foremnym* (*bryłą platońską*), gdy jego ściany są przystającymi wielokątami foremnymi.

Twierdzenie 3. *Istnieje dokładnie pięć następujących typów wielościanów regularnych:*

m	l	w	k	s	typ
3	3	4	6	4	czworościan
4	3	8	12	6	sześcian
3	4	6	12	8	ośmiościan
5	3	20	30	12	dwunastościan
3	5	12	30	20	dwudziestościan

gdzie m, l oznaczają odpowiednio ilości krawędzi ścian i naroża.

Pięć brył platońskich

Wn. 2. *Z dokładnością do podobieństwa istnieje dokładnie pięć wielościanów foremnych: czworościan, sześcian, ośmiościan, dwunastościan i dwudziestościan.*

Stwierdzenie 3. Ośmiościan i sześcian są wzajemnie dualne w tym sensie, że istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość pomiędzy ścianami jednego i wierzchołkami drugiego, która przeprowadza dowolną krawędź wyznaczoną przez parę wierzchołków w krawędź wyznaczoną przez parę odpowiadających im ścian. Taki sam związek zachodzi dla dwunastościanu i dwudziestościanu.

Stwierdzenie 4. Środki ścian sześcianu są wierzchołkami ośmiościanu foremnego i odwrotnie. Środki ścian dwunastościanu foremnego są wierzchołkami dwudziestościanu foremnego i odwrotnie.