Potęga punktu względem okręgu

Twierdzenie 1. *Jeżeli dwie proste przechodzące przez punkt P przecinają okrąg ω w punktach A, B i C, D odpowiednio ($A, C \neq P$), to*

$$|AP| \cdot |BP|_{AP} = |CP| \cdot |DP|_{CP}.$$

Def. 1. Liczbę $\lambda(P, \omega)$ określoną w Twierdzeniu 1 nazywamy *potęgą* punktu P względem okręgu ω.

Uwaga 1. Potęga punktu względem okręgu jest dodatnia, zerowa lub ujemna odpowiednio dla punktu leżącego na zewnątrz koła, na okręgu i wewnątrz koła.

Twierdzenie 2. $\lambda(P, \omega) = |OP|^2 - r^2$, *gdzie r jest promieniem i O środkiem okręgu.*

Prosta potęgowa

Wn. 1. *Jeżeli punkt P leży na zewnątrz okręgu ω, to $\lambda(P, \omega) = |PT|^2$, gdzie PT jest odcinkiem stycznej.*

Twierdzenie 3. *Jeżeli okręgi ω_1, ω_2 mają różne środki, to zbiór punktów o równych potęgach względem tych okręgów jest prostą. Jest ona prostopadła do prostej łączącej środki okręgów.*

Def. 2. Prostą określoną w Twierdzeniu 3 nazywamy *prostą potęgową*.

Def. 3. Inwersją (symetrią) względem okręgu $\omega(O, r)$ nazywamy przekształcenie

$$\mathbf{S}_{Or} : \mathcal{P} \setminus \{O\} \to \mathcal{P} \setminus \{O\},$$

takie że

$$\mathbf{S}_{Or}(X) = (X') :\Leftrightarrow |OX'|_{OX} \cdot |OX| = r^2.$$

Inwersję rozszerzamy do przekształcenia

$$\mathbf{S}_{Or} : \mathcal{P} \cup \{\infty\} \to \mathcal{P} \cup \{\infty\},$$

przyjmując dodatkowo

$$\mathbf{S}_{Or}(O) = \infty; \; S_{Or}(\infty) = O.$$

Rozszerzoną płaszczyznę $\mathcal{P} \cup \{\infty\}$ nazywamy *płaszczyzną inwersyjną* lub *płaszczyzną Möbiusa*.

Stwierdzenie 1. Inwersja zachowuje proste przechodzące przez jej środek.

Stwierdzenie 2. Inwersja $\mathbf{S}_{Or}$ jest inwolucją, której zbiorem punktów stałych jest $\omega(O, r)$.

Twierdzenie 4. *Dowolny okrąg przechodzący przez parę punktów inwersyjnych (czyli punkt $X \notin \omega(O,r)$ i jego obraz $X' = \mathbf{S}_{or}(X)$) jest niezmienniczy w $\mathbf{S}_{Or}$ i ortogonalny do $\omega(O,r)$.*

Twierdzenie 5. *Obrazem okręgu $\omega(O',r')$ przechodzącego przez środek inwersji $\mathbf{S}_{Or}$ jest prosta k. Ponadto*

1. *k jest prostą potęgową okręgów $\omega(O,r)$ i $\omega(O',r')$.*
2. *Obrazem środka O' okręgu jest punkt symetryczny do środka O inwersji względem prostej k ($\mathbf{S}_{Or}(O') = \mathbf{S}_k(O)$).*

Twierdzenie 6. *Obrazem w inwersji $\mathbf{S}_{Or}$ okręgu ω, który nie przechodzi przez O jest okrąg. Dokładniej $\mathbf{S}_{Or}(\omega) = \mathbf{J}_O^{r^2/\lambda}(\omega)$, gdzie λ jest potęgą O względem ω.*

Uwaga 2. Przekształcenia $\mathbf{S}_{Or}$ i $\mathbf{J}_O^{r^2/\lambda}$ nie pokrywają się w punktach okręgu ω oraz inaczej przekształcają jego środek.

Stwierdzenie 3. Złożenie dwóch inwersji o tym samym środku jest jednokładnością. Dokładniej $\mathbf{S}_{Or_2} \circ \mathbf{S}_{Or_1} = \mathbf{J}_O^{r_2^2/r_1^2}$.

Lemat 7. *Niech ω będzie dowolnym okręgiem lub prostą. Jeśli $P \in \omega$ i $Q \notin \omega$, to istnieje dokładnie jeden zbiór ω' będący okręgiem lub prostą, który zawiera Q i jest styczny do ω w P.*

Twierdzenie 8. *Inwersja jest przekształceniem wiernokątnym.*

Analityczna postać inwersji

Twierdzenie 9. *Inwersja o środku w punkcie o współrzędnej zespolonej z_0 i promieniu r wyraża się wzorem:*

$$z \mapsto \frac{r^2}{\overline{z - z_0}} + z_0.$$

Twierdzenie Mascheroniego (1750-1800) (Mohra (1672))

Twierdzenie 10 (Mohra-Mascheroniego)**.** *Dowolną konstrukcję wykonalną za pomocą cyrkla i liniału można przeprowadzić za pomocą samego cyrkla, jeśli prostą uważamy za daną gdy dane są dwa różne jej punkty.*

Dowód.

1. Odbicie punktu względem prostej.
2. Podwojenie odcinka.
3. Obraz punktu w inwersji.
4. Przecięcie okręgu prostą.
5. Wyznaczenie środka okręgu.
6. Punkt wspólny dwóch prostych.
7. Środek łuku (uzupełnienie do (4))

□

Twierdzenie Miquela

Twierdzenie 11 (Miquela)**.** *Niech okręgi* ω_1, ω_2 *przecinają się w punktach* A_1, A_2*, okręgi* ω_2, ω_3 *w punktach* B_1, B_2*;* ω_3, ω_4 *- w punktach* C_1, C_2 *i* ω_4, ω_1 *w punktach* D_1, D_2*. Jeśli punkty* A_1, B_1, C_1, D_1 *leżą na okręgu, to punkty* A_2, B_2, C_2, D_2 *również.*