

Liczby konstruowalne

Twierdzenie 1. *Mając dany odcinek długości 1 można skonstruować odcinek długości:*

1. q dla dowolnego $q \in \mathbb{Q}_+$;
2. \sqrt{q} ($q \in \mathbb{Q}_+$);
3. $a + b\sqrt{q}$ ($a, b, q \in \mathbb{Q}_+$);

Def. 1. Liczbę rzeczywistą s nazywamy *konstruowalną*, gdy istnieje taka rodzina podciał

$$\mathbb{Q} = F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_k$$

ciała liczb rzeczywistych, że $s \in F_k$ oraz

$$F_i = F_{i-1}(\sqrt{\omega_i}) = \{a + b\sqrt{\omega_i} : a, b \in F_{i-1}\}$$

dla pewnego $\omega_i \in F_{i-1}$, $i = 1, 2, \dots, k$.

Twierdzenie 2. *Liczby konstruowalne tworzą podciało ciała liczb rzeczywistych.*

Lemat 3. *Niech $\omega, a_i, b_i \in F$ dla $i = 0, 1, \dots, n-1$, $\sqrt{\omega} \notin F$,*

$$W(x) = x^n + (a_{n-1} + b_{n-1}\sqrt{\omega})x^{n-1} + \dots + (a_1 + b_1\sqrt{\omega})x + a_0 + b_0\sqrt{\omega}$$
$$\overline{W(x)} = x^n + (a_{n-1} - b_{n-1}\sqrt{\omega})x^{n-1} + \dots + (a_1 - b_1\sqrt{\omega})x + a_0 - b_0\sqrt{\omega}.$$

Wówczas $W(x)\overline{W(x)}$ jest wielomianem stopnia $2n$ o współczynnikach z ciała F .

Pierre Laurent Wantzel 1814-1848

Twierdzenie 4 (Wantzela). *Jeżeli dana liczba jest konstruowalna za pomocą cyrkuła i linijki, to jest ona pierwiastkiem pewnego nierozkładalnego wielomianu o współczynnikach wymiernych, którego stopień jest potęgą liczby 2. (Każda liczba konstruowalna jest liczbą algebraiczną, której stopień jest potęgą liczby 2.)*

Liczby pierwsze Fermata i konstrukcje n -kątowników

$$F_k = 2^{2^k} + 1$$

$F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$, $F_4 = 65537$, $F_5 = 4294967297$ nie jest liczbą pierwszą (Euler, 1732). $4294967297 = 641 \cdot 6700417$. Dotąd nie wiadomo, czy są inne liczby pierwsze Fermata.

Twierdzenie 5 (Gaussa-Wantzela, 1801/1837). *n -kątownik foremny jest konstruowalny wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$n = 2^k \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_l$$

gdzie p_1, p_2, \dots, p_l są różnymi liczbami pierwszymi Fermata.

17-kątownik - Carl Friedrich Gauss (1796) 257-kątownik - Friedrich Julius Richelot (1832) 65537-kątownik - Johann Gustav Hermes (1894)

Zadania starożytnych

- Podwojenie sześcianu: Mając dany sześcián, skonstruować krawędź sześcianu o dwukrotnie większej objętości.
- Trysekcja kąta: Podzielić dany kąt na trzy kąty przystające.
- Kwadratura koła: Skonstruować kwadrat o takim samym polu jak dane koło.

Wn. 1. Konstrukcji podwojenia sześcianu nie można wykonać za pomocą cyrkla i linijki ponieważ stopień liczby algebraicznej $\sqrt[3]{2}$ jest równy 3 (nie jest potęgą dwójki).

Wn. 2. Nie można przy pomocy cyrkla i linijki dokonać trysekcji dowolnego kąta. Najprostszym przykładem jest kąt 60° , ponieważ $60^\circ/3 = 20^\circ$ nie jest konstruowalny na mocy twierdzenia Gaussa-Wantzela.

Uwaga 1. Kwadratura koła nie jest konstruowalna ponieważ π nie jest liczbą algebraiczną (Ferdinand Lindemann 1882).

Złoty podział, dziesięciokąt i pięciokąt foremny

- Długość boku dziesięciokąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu 1 wynosi

$$\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$

- Odwrotność tej liczby:

$$\varphi := \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

nazywana jest *złotym podziałem* (całość do dłuższej ma się tak, jak dłuższa do krótszej).

- długość boku pięciokąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu 1

$$x = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}}.$$

Konstrukcja pięciokąta foremnego za pomocą samego cyrkla:

1. Na okręgu $\omega(0, r)$ (o środku O i promieniu r) odkładamy kolejno punkty A, B, C, D promieniem r ;
2. wyznaczamy środki P, Q, R łuków AB, BC i CD odpowiednio;
 - (a) znajdujemy punkt wspólny E łuków zakreślonych z punktów A i D promieniem $|AC|$;

- (b) środek Q łuku BC znajduje się w przecięciu z łukiem o środku A i promieniu $|OE|$;
 - (c) środki P, R łuków AB i CD wyznaczamy przecinając je z okręgiem $\omega(Q, r)$;
3. wyznaczamy punkt S przecięcia łuków zakreślonych z punktów P i R promieniem $|AQ|$ w stronę środka okręgu.
 4. $|AS|$ jest długością boku pięciokąta wpisanego w okrąg.