Liczby konstruowalne

Twierdzenie 1. *Mając dany odcinek długości 1 można skonstruować odcinek długości:*

1. *q dla dowolnego $q \in \mathbb{Q}_+$;*
2. *$\sqrt{q}$ ($q \in \mathbb{Q}_+$);*
3. *$a + b\sqrt{q}$ ($a, b, q \in \mathbb{Q}_+$);*

Def. 1. Liczbę rzeczywistą s nazywamy *konstruowalną*, gdy istnieje taka rodzina podciał

$$\mathbb{Q} = F_0 \subset F_1 \subset ... \subset F_k$$

ciała liczb rzeczywistych, że $s \in F_k$ oraz

$$F_i = F_{i-1}(\sqrt{\omega_i}) = \{a + b\sqrt{\omega_i} : \ a, b \in F_{i-1}\}$$

dla pewnego $\omega_i \in F_{i-1}$, $i = 1, 2, ..., k$.

Twierdzenie 2. *Liczby konstruowalne tworzą podciało ciała liczb rzeczywistych.*

Lemat 3. *Niech $\omega, a_i, b_i \in F$ dla $i = 0, 1, ..., n-1$, $\sqrt{\omega} \notin F$,*

$$W(x) = x^n + (a_{n-1} + b_{n-1}\sqrt{\omega})x^{n-1} + ... + (a_1 + b_1\sqrt{\omega})x + a_0 + b_0\sqrt{\omega}$$

$$\overline{W(x)} = x^n + (a_{n-1} - b_{n-1}\sqrt{\omega})x^{n-1} + ... + (a_1 - b_1\sqrt{\omega})x + a_0 - b_0\sqrt{\omega}.$$

Wówczas $W(x)\overline{W(x)}$ jest wielomianem stopnia $2n$ o współczynnikach z ciała F.

Pierre Laurent Wantzel 1814-1848

Twierdzenie 4 (Wantzela)**.** *Jeżeli dana liczba jest konstruowalna za pomocą cyrkla i linijki, to jest ona pierwiastkiem pewnego nierozkładalnego wielomianu o współczynnikach wymiernych, którego stopień jest potęgą liczby 2. (Każda liczba konstruowalna jest liczbą algebraiczną, której stopień jest potęgą liczby 2.)*

Liczby pierwsze Fermata i konstrukcje n-kątów

$$F_k = 2^{2^k} + 1$$

$F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$, $F_4 = 65537$ $F_5 = 4294967297$ nie jest liczbą pierwszą (Euler, 1732). $4294967297 = 641 \cdot 6700417$. Dotąd nie wiadomo, czy są inne liczby pierwsze Fermata.

Twierdzenie 5 (Gaussa-Wantzela, 1801/1837)**.** *n-kąt foremny jest konstruowalny wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$n = 2^k \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_l$$

gdzie $p_1, p_2, ..., p_l$ są różnymi liczbami pierwszymi Fermata.

17-kąt - Carl Friedrich Gauss (1796) 257-kąt - Friedrich Julius Richelot (1832) 65537-kąt - Johann Gustav Hermes (1894)

Lemat 6. *Jeżeli p jest liczbą pierwszą, to*

$$\varepsilon_p = \cos\frac{2\pi}{p} + i\sin\frac{2\pi}{p}$$

jest liczbą algebraiczną stopnia $p-1$.

Lemat 7. *Jeżeli p jest liczbą pierwszą, to*

$$\varepsilon_{p^2} = \cos\frac{2\pi}{p^2} + i\sin\frac{2\pi}{p^2}$$

jest liczbą algebraiczną stopnia $p(p-1)$.

Lemat 8. *Nie p będzię liczbą pierwszą większą od dwóch. Wówczas stopień liczby algebraicznej ε_p jest potęgą liczby 2 wtedy i tylko wtedy, gdy $p = 2^{2^k}+1$ dla pewnego całkowitego k.*

Zadania starożytnych

- Podwojenie sześcianu: Mając dany sześcian, skonstruować krawędź sześcianu o dwukrotnie większej objętości.
- Trysekcja kąta: Podzielić dany kąt na trzy kąty przystające.
- Kwadratura koła: Skonstruować kwadrat o takim samym polu jak dane koło.

Wn. 1. *Konstrukcji podwojenia sześcianu nie można wykonać za pomocą cyrkla i linijki ponieważ stopień liczby algebraicznej $\sqrt[3]{2}$ jest równy 3 (nie jest potęgą dwójki).*

Wn. 2. *Nie można przy pomocy cyrkla i linijki dokonać trysekcji dowolnego kąta. Najprostszym przykładem jest kąt 60°, ponieważ $60^\circ/3 = 20^\circ$ nie jest konstruowalny na mocy twierdzenia Gaussa-Wantzela.*

Uwaga 1. Kwadratura koła nie jest konstruowalna ponieważ π nie jest liczbą algebraiczną (Ferdinand Lindemann 1882).

Złoty podział, dziesięciokąt i pięciokąt foremny

- Długość boku dziesięciokąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu 1 wynosi
$$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

- Odwrotność tej liczby:

$$\varphi := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

nazywana jest *złotym podziałem* (całość do dłuższej ma się tak, jak dłuższa do krótszej).

- długość boku pięciokąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu 1

$$x = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}.$$

Konstrukcja pięciokąta foremnego za pomocą samego cyrkla:

1. Na okręgu $\omega(0, r)$ (o środku O i promieniu r) odkładamy kolejno punkty A, B, C, D promieniem r;
2. wyznaczamy środki P, Q, R łuków AB, BC i CD odpowiednio;
   (a) znajdujemy punkt wspólny E łuków zakreślonych z punktów A i D promieniem $|AC|$;
   (b) środek Q łuku BC znajduje się w przecięciu z łukiem o środku A i promieniu $|OE|$;
   (c) środki P, R łuków AB i CD wyznaczamy przecinając je z okręgiem $\omega(Q, r)$;
3. wyznaczamy punkt S przecięcia łuków zakreślonych z punktów P i R promieniem $|AQ|$ w stronę środka okręgu.
4. $|AS|$ jest długością boku pięciokąta wpisanego w okrąg.