Postać analityczna izometrii i podobieństw

Twierdzenie 1. *Niech O będzie ustalonym punktem płaszczyzny (przestrzeni) euklidesowej. Każda izometria φ jest złożeniem izometrii ψ zachowującej O z translacją.*

$$\varphi = \mathbf{T}_{\overrightarrow{OO'}} \circ \psi, \text{ gdzie } O' = \varphi(O).$$

- Oznaczmy $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ w przypadku płaszczyzny
- $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ w przypadku przestrzeni.
- Wówczas każdą izometrię można zapisać w postaci

$$X \mapsto AX + B$$

gdzie A jest macierzą jest ortogonalną (tzn. $AA^T = J$) odpowiednio stopnia 2 lub 3,

Postać analityczna izometrii i podobieństw

- a podobieństwo

$$X \mapsto kAX + B$$

gdzie $k \in \mathbb{R}_+$.

- Podobieństwo (izometria) jest parzyste, gdy dodatkowo $\det A = 1$, a nieparzyste, gdy $\det A = -1$.
- Izometria

$$X \mapsto AX$$

jest inwolucją, gdy macierz ortogonalna A jest symetryczna.

Wn. 1. *Każda izometria przestrzeni postaci $X \mapsto AX$ jest:*

1. *obrotem, gdy* $\det A = 1$,
2. *symetrią obrotową, gdy* $\det A = -1$.

Najważniejsze przykłady

- Macierz obrotu o kąt α:

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

- Macierze symetrii względem Ox i Oy:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; \qquad \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- Macierz symetrii względem prostej nachylonej do dodatniej półosi Ox pod kątem α:

$$\begin{bmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{bmatrix}$$

Opis izometrii i podobieństw płaszczyzny za pomocą liczb zespolonych

$z, a, b \in \mathbb{C}$ (są liczbami zespolonymi), z jest zespoloną współrzędną punktu Z,

- izometrie parzyste: $\varphi(z) = az + b$ gdzie $|a| = 1$,
- izometrie nieparzyste: $\varphi(z) = a\overline{z} + b$ gdzie $|a| = 1$,
- podobieństwa parzyste: $\varphi(z) = az + b$ gdzie $a \neq 0$,
- podobieństwa nieparzyste: $\varphi(z) = a\overline{z} + b$ gdzie $a \neq 0$,
- Postać analityczną przekształcenia φ z punktem stałym P otrzymujemy działając na przekształcenie ψ z punktem stałym O automorfizmem wewnętrznym wyznaczonym przez translację $\mathbf{T}_{\overrightarrow{OP}}$

$$\varphi = \mathbf{T}_{\overrightarrow{OP}} \circ \psi \circ \mathbf{T}_{\overrightarrow{PO}}.$$

- Przykładowo:

$$\varphi(z) = i(z - z_0) + z_0$$

jest analityczną postacią obrotu $\mathbf{R}_{z_0}^{90^\circ}$.

Punkty szczególne w trójkącie

Twierdzenie 2. *W dowolnym trójkącie ABC współpękowe są następujące trójki prostych:*

1. *środkowe,*
2. *symetralne boków,*
3. *wysokości,*
4. *dwusieczne kątów wewnętrznych,*

Stałe oznaczenia dla punktów i długości odcinków szczególnych trójkąta ABC:

- G - środek ciężkości, czyli punt przecięcia środkowych,
- O - środek okręgu opisanego,
- H - ortocentrum czyli punkt przecięcia wysokości,
- I - środek okręgu wpisanego,
- a, b, c - długości boków przeciwległych odpowiednio wierzchołkom A, B, C,
- $p := \frac{1}{2}(a + b + c)$ - połowa obwodu,
- R - promień okręgu opisanego, r - promień okręgu wpisanego.

Def. 1. Prostą $l(O, G)$ przechodzącą przez środek ciężkości i środek okręgu opisanego nazywamy *prostą Eulera* (dla trójkąta równobocznego jest to dowolna prosta przechodząca przez $O = G$).

Twierdzenie 3. $H = \mathbf{J}_G^{-2}(O)$.

Twierdzenie 4 (O okręgu dziewięciu punktów)**.** *Środki boków trójkąta, spodki wysokości i środki odcinków łączących ortocentrum z wierzchołkami leżą na jednym okręgu.*

Def. 2. Okrąg opisany w Tw.4 nazywamy okręgiem *Eulera* (lub *Feuerbacha*) (lub *dziewięciu punktów*).

Zorientowana długość i stosunek podziału

Def. 3. Jeśli $l(A, B) \parallel l(C, D)$, to zorientowaną (względem AB) długością odcinka CD nazywamy liczbę:

$$|CD|_{AB} := \begin{cases} |CD| & \text{gdy wektory } \overrightarrow{AB} \text{ i } \overrightarrow{CD} \text{ mają te same zwroty} \\ -|CD| & \text{gdy wektory } \overrightarrow{AB} \text{ i } \overrightarrow{CD} \text{ mają zwroty przeciwne} \end{cases}$$

Def. 4. Zorientowanym stosunkiem równoległych odcinków AB i CD nazywamy liczbę $\dfrac{AB}{CD} := \dfrac{|AB|}{|CD|_{AB}}$. Liczbę $\dfrac{AM}{MB}$ nazywamy zorientowanym stosunkiem podziału odcinka AB przez punkt $M \neq B$.

Uwaga 1. Dla dowolnych $A \neq B$ i dowolnego $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ istnieje dokładnie jeden punkt M taki, że $\dfrac{AM}{MB} = x$.

Twierdzenia Cevy i Menelaosa

Twierdzenie 5 (Cevy)**.** *Niech różne od wierzchołków trójkąta ABC punkty A', B', C' leżą odpowiednio na prostych boków BC, CA i AB. Proste AA', BB' i CC' są współpękowe (tzn. mają punkt wspólny lub są równoległe) wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = 1.$$

Twierdzenie 6 (Menelaosa)**.** *Niech różne od wierzchołków trójkąta ABC punkty A', B', C' leżą odpowiednio na prostych boków BC, CA i AB. Punkty te leżą na jednej prostej wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = -1.$$