Twierdzenie 1. *Przekształcenie φ jest podobieństwem wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $\lambda \in \mathbb{R}_+$, taka że $|\varphi(A)\varphi(B)| = \lambda|AB|$ dla dowolnych punktów A, B.*

Twierdzenie 2. *Jeżeli podobieństwa φ, ψ pokrywają się w trzech punktach niewspółliniowych, to $\varphi = \psi$.*

Dylatacje

Def. 1. *Dylatacją* nazywamy przekształcenie, które dowolną prostą przeprowadza na prostą do niej równoległą.

Uwaga 1. Dylatacje tworzą grupę przekształceń.

Twierdzenie 3. *Dylatacja ma dokładnie jeden punkt stały lub jest translacją.*

Def. 2. Dylatację z punktem stałym nazywamy *jednokładnością*.

Twierdzenie 4. *Jednokładność jest podobieństwem.*

Def. 3. Niech φ będzie jednokładnością z punktem stałym O i skali podobieństwa λ. Skalą jednokładności nazywamy liczbę $s := -\lambda$, gdy dla $X \neq O$ zachodzi $\mathcal{B}(XO\varphi(X))$ i liczbę $s := \lambda$ w przeciwnym przypadku. Przyjmujemy oznaczenie $\mathbf{J}_O^s$.

Twierdzenie 5 (O doskonałej jednorodności). *Jeśli $\neg Col(ABC)$ i $\frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{|B'C'|}{|BC|} = \frac{|C'A'|}{|CA|}$, to istnieje dokładnie jedno podobieństwo φ, takie że $\varphi(A) = A'$, $\varphi(B) = B'$ i $\varphi(C) = C'$.*

Wn. 1. *Dowolne podobieństwo jest złożeniem jednokładności z izometrią.*

Def. 4. Złożenie jednokładności z izometrią parzystą lub nieparzystą nazywamy odpowiednio podobieństwem parzystym lub nieparzystym.

Twierdzenie 6. *Niech $A \neq B$, podobieństwa φ, ψ będą jednocześnie parzyste lub nieparzyste, $\varphi(A) = \psi(A)$ i $\varphi(B) = \psi(B)$. Wówczas $\varphi = \psi$.*

Def. 5. *Podobieństwem spiralnym* nazywamy złożenie $\mathbf{R}_O^\alpha \circ \mathbf{J}_O^s$ jednokładności z obrotem o tym samym środku a *symetrią dylatacyjną* złożenie $\mathbf{S}_a \circ \mathbf{J}_O^s$ jednokładności z symetrią o osi przechodzącej przez środek jednokładności.

Uwaga 2. W definicji 5 można zmienić kolejność przekształceń $\mathbf{R}_O^\alpha \circ \mathbf{J}_O^s = \mathbf{J}_O^s \circ \mathbf{R}_O^\alpha$ i $\mathbf{S}_a \circ \mathbf{J}_O^s = \mathbf{J}_O^s \circ \mathbf{S}_a$ dla $O \in a$.

Twierdzenie 7. *Dowolne nieizometryczne podobieństwo ma dokładnie jeden punkt stały.*

Twierdzenie 8. *Każde nieizometryczne podobieństwo parzyste jest podobieństwem spiralnym a nieparzyste - symetrią dylatacyjną.*

Twierdzenie 9. *Izometrie są dzielnikiem normalnym grupy podobieństw.*

Półpłaszczyzny i płaszczyzny w geometrii bezwymiarowej

Def. 6. Mówimy, że punkty A, C leżą po:

1. przeciwnych stronach prostej b: $\mathcal{B}(AbC) :\leftrightarrow A, C \notin b \wedge \exists T(T \in b \wedge \mathcal{B}(ATC))$
2. tej samej stronie prostej b: $A \simeq_b C :\leftrightarrow \exists T(\mathcal{B}(AbT) \wedge \mathcal{B}(CbT))$.

Def. 7.

1. Półpłaszczyzną wyznaczoną przez punkt A i prostą b nazywamy zbiór: $Hp(A, b) := \{X : X \simeq_b A\}$.
2. Płaszczyzną wyznaczoną przez punkt A i prostą b nazywamy zbiór: $Pl(A, b) := b \cup Hp(A, b) \cup \{X : \mathcal{B}(XbA)\}$.
3. Oznaczenia: wielkie litery greckie, $Pl(a, b), Pl(A, B, C)$.

Górny aksjomat wymiaru dla przestrzeni 3-wymiarowej

Def. 8. Punkty $A_1, A_2, ..., A_n$ są *współpłaszczyznowe*: $Cp(A_1, A_2, ..., A_n) :\leftrightarrow \exists\Phi(A_1, A_2, ..., A_n \in \Phi)$

(A9') (Górny aksjomat wymiaru dla geometrii 3-wymiarowej) $P \neq Q \wedge \forall_{i=1}^{4}(A_iP \equiv A_iQ) \rightarrow Cp(A_1, A_2, A_3, A_4)$

Def. 9. Płaszczyznę określoną w (A9') nazywamy płaszczyzną symetralną odcinka PQ i oznaczamy $Ps(P, Q)$.

Def. 10. Symetria względem płaszczyzny i rzut prostokątny na płaszczyznę: $\mathbf{S}_\Phi(A) = A' :\leftrightarrow A = A' \vee \Phi = Ps(A, A')$. $\mathbf{R}_\Phi(A) = \mathbf{M}(A, \mathbf{S}_\Phi(A))$.

Równoległość i prostopadłość

- $a \parallel b :\leftrightarrow a = b \vee \exists\Phi(a, b \in \Phi \wedge a \cap b = \emptyset)$.
- Proste a, b nazywamy *skośnymi* gdy nie istnieje płaszczyzna Φ, taka że $a, b \subset \Phi$.
- $a \parallel \Phi :\leftrightarrow \exists b(a \parallel b \subset \Phi)$.
- $a \parallel b \rightarrow \forall\Phi(b \subset \Phi \rightarrow a \parallel \Phi)$.
- $a \perp \Phi :\leftrightarrow \exists A, B(a = l(A, B) \wedge \Phi = Ps(A, B))$.
- $a \perp \Phi \leftrightarrow \exists b, c \subset \Phi(b \neq c \wedge a \perp b, c) \leftrightarrow \forall b \subset \Phi(a \cap b \neq \emptyset \rightarrow a \perp b)$.
- $\Phi \perp \Omega :\leftrightarrow \exists a(\Phi \perp a \subset \Omega)$.
- $a \perp \Phi \rightarrow \forall\Omega(a \subset \Omega \rightarrow \Omega \perp \Phi)$.
- Dowolne proste skośne a, b mają wspólną prostopadłą $(c \perp a, b)$.

Twierdzenie 10 (O sztywności dla przestrzeni). *1. Jeśli $\neg Cp(A_1, A_2, A_3, A_4)$ i $(A_1A_2A_3A_4) \equiv (B_1B_2B_3B_4)$, to istnieje dokładnie jedna izometria ϕ, taka że $\forall_{i=1}^{4}\phi(A_i) = B_i$.*

2. $\mathbf{S}_\Phi$ jest jedyną różną od identyczności izometrią, która zachowuje dane trzy punkty niewspółliniowe A, B, C $(\Phi = Pl(ABC))$.

Twierdzenie 11. *Każda izometria przestrzeni jest złożeniem najwyżej czterech symetrii względem płaszczyzn.*

Twierdzenie 12 (O redukcji). *Jeśli płaszczyzny Φ_1, Φ_2, Φ_3 są równoległe lub mają wspólną prostą, to istnieje płaszczyzna Ω, taka że $\mathbf{S}_{\Phi_3} \circ \mathbf{S}_{\Phi_2} \circ \mathbf{S}_{\Phi_1} = \mathbf{S}_\Omega$.*

Klasyfikacja izometrii przestrzeni euklidesowej

Def. 11. Złożenie parzystej ilości symetrii względem płaszczyzn nazywamy *ruchem fizycznym*, a złożenie nieparzystej – *izometrią nieparzystą*.

Def. 12. Złożenie $\mathbf{S}_{\Phi_2} \circ \mathbf{S}_{\Phi_1}$ nazywamy *translacją* gdy $\Phi_1 \parallel \Phi_2$, natomiast *obrotem* gdy $\Phi_1 \nparallel \Phi_2$. Jeśli dodatkowo $\Phi_1 \perp \Phi_2$, to obrót nazywamy *półobrotem* lub *symetrią względem prostej*. Obroty oznaczamy $\mathbf{R}_l^\alpha$, translacje $\mathbf{T}_{\overrightarrow{u}}$, półobroty $\mathbf{S}_l$.

Uwaga 3. Oś l i miara kąta α nie określają jednoznacznie obrotu.

Wn. 2. *W reprezentacji $\mathbf{S}_{\Phi_2} \circ \mathbf{S}_{\Phi_1}$ danego obrotu lub translacji jedna z płaszczyzn może być dowolną płaszczyzną z odpowiedniego pęku płaszczyzn.*

Wn. 3. *$\mathbf{S}_{\Phi_2} \circ \mathbf{S}_{\Phi_1} = \mathbf{S}_{\Phi_1} \circ \mathbf{S}_{\Phi_2}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\Phi_1 \perp \Phi_2$.*

Def. 13.
1. *Symetrią z poślizgiem* nazywamy złożenie $\mathbf{T}_{\overrightarrow{u}} \circ \mathbf{S}_\Phi$, gdzie $\overrightarrow{u} \parallel \Phi$.
2. *Symetrią obrotową* nazywamy złożenie $\mathbf{R}_l^\alpha \circ \mathbf{S}_\Phi$, gdzie $l \perp \Phi$.

   Jeśli $\mathbf{R}_l^\alpha$ jest półobrotem (czyli $\mathbf{R}_l^\alpha = \mathbf{S}_l$), to symetrię obrotową nazywamy *symetrią środkową* i oznaczamy $\mathbf{S}_O$, gdzie $\{O\} := l \cap \Phi$.
3. *Ruchem śrubowym* nazywamy złożenie $\mathbf{R}_l^\alpha \circ \mathbf{T}_{\overrightarrow{u}}$, gdzie $\overrightarrow{u} \parallel l$.

Wn. 4. *$\mathbf{S}_{\Phi_3} \circ \mathbf{S}_{\Phi_2} \circ \mathbf{S}_{\Phi_1}$ jest: symetrią z poślizgiem, gdy $\Phi_1 \parallel \Phi_2 \perp \Phi_3$; symetrią obrotową, gdy $\Phi_1, \Phi_2 \perp \Phi_3$ i $\Phi_1 \nparallel \Phi_2$; symetrią środkową, gdy Φ_1, Φ_2, Φ_3 są parami prostopadłe.*

Ruch śrubowy jest złożeniem $\mathbf{S}_{\Phi_4} \circ \mathbf{S}_{\Phi_3} \circ \mathbf{S}_{\Phi_2} \circ \mathbf{S}_{\Phi_1}$, gdzie $\mathbf{S}_{\Phi_4}, \mathbf{S}_{\Phi_3} \perp \mathbf{S}_{\Phi_2} \parallel \mathbf{S}_{\Phi_1}$ i $\mathbf{S}_{\Phi_4} \nparallel \mathbf{S}_{\Phi_3}$.

Twierdzenie 13. *Każda izometria nieparzysta jest symetrią obrotową lub symetrią z poślizgiem (w tym symetrią płaszczyznową lub środkową).*

Wn. 5. *Każda izometria nieparzysta, która posiada punkt stały jest symetrią obrotową.*

Lemat 14. *Każde złożenie dwóch półobrotów jest ruchem śrubowym.*

Twierdzenie 15. *Każdy ruch fizyczny jest ruchem śrubowym (w tym identycznością, translacją lub obrotem).*

Wn. 6.

1. *Każdy ruch fizyczny posiadający punkt stały jest obrotem.*
2. *Złożenie dwóch obrotów względem prostych przecinających się jest obrotem.*

Wn. 7. *Grupa izometrii przestrzeni jest biinwolutywna, tzn. każda izometria jest złożeniem dwóch inwolucji (czyli symetrii względem płaszczyzn, prostych lub punktów).*

Uwaga 4. Każde podobieństwo przestrzeni jest złożeniem jednokładności z izometrią. $\mathbf{S}_O = \mathbf{J}_O^{-1}$ jest jednak izometrią nieparzystą i dlatego nie można definiować podobieństw parzystych i nieparzystych w taki sam sposób jak w przypadku płaskim. Podobieństwo parzyste jest złożeniem izometrii parzystej z jednokładnością o skali dodatniej.

Def. 14. Jeśli $O \in l$, to złożenie $\mathbf{R}_l^\alpha \circ \mathbf{J}_O^s$ nazywamy *podobieństwem spiralnym.*

Twierdzenie 16. *Każde nieizometryczne podobieństwo przestrzeni jest podobieństwem spiralnym (parzystym, gdy $s > 0$, a nieparzystym, gdy $s < 0$).*