Literatura:

1. H.S.M. Coxeter, *Wstęp do geometrii dawnej i nowej.*
2. K. Borsuk, W. Szmielew, *Podstawy geometrii.*
3. R. Courant, H. Robbins, *Co to jest matematyka.*
4. M. Kordos, L.W. Szczerba, *Geometria dla nauczycieli.*
5. S.J. Zetel, *Geometria trójkąta.*
6. A. Tarski, *What is elementary geometry* in: The Axiomatic Method, North Holland, 1959.
7. W. Schwabhäuser, W. Szmielew, A. Tarski, *Metamathematische Methoden in der Geometrie*, 1983.

Język teorii geometrii euklidesowej A.Tarskiego:

Na język teorii geometrii euklidesowej A.Tarskiego składają się:

1. Zmienne indywidualne $A, B, C, ...$ oznaczające punkty,
2. dwa predykaty (symbole relacyjne):

   trzymiejscowy "$\mathcal{B}$" i

   czteromiejscowy "$\equiv$".

Formułę $\mathcal{B}(ABC)$ czytamy "B leży między A i C a formułę $AB \equiv CD$ - (odcinek) AB przystaje do (odcinka) CD.

Aksjomatyka geometrii absolutnej bezwymiarowej:

A1 $AB \equiv BA$

A2 $AB \equiv PQ \wedge AB \equiv RS \rightarrow PQ \equiv RS$

A3 $AB \equiv CC \rightarrow A = B$

A4 $\exists X(\mathcal{B}(QAX) \wedge AX \equiv BC)$ (aksjomat o odkładaniu odcinka)

A5 $(A \neq B \wedge \mathcal{B}(ABC) \wedge \mathcal{B}(A'B'C') \wedge AB \equiv A'B' \wedge BC \equiv B'C' \wedge \ AD \equiv A'D' \wedge BD \equiv B'D') \rightarrow CD \equiv C'D'$ (aksjomat o pięciu odcinkach)

A6 $\mathcal{B}(ABA) \rightarrow A = B$

A7 $\mathcal{B}(APC) \wedge \mathcal{B}(BQC) \rightarrow \exists X(\mathcal{B}(PXB) \wedge \mathcal{B}(QXA))$ (aksjomat Pascha)

Twierdzenie 1 (Pascha)**.** *Jeżeli prosta zawarta w płaszczyźnie trójkąta przecina jeden z jego boków, to przecina też drugi.*

Asjomaty wymiaru:

A8 $\exists A, B, C(\neg\mathcal{B}(ABC) \wedge \neg\mathcal{B}(BCA) \wedge \neg\mathcal{B}(CAB))$ (dolny aksjomat wymiaru)

A9 $(P \neq Q \wedge AP \equiv AQ \wedge BP \equiv BQ \wedge CP \equiv CQ) \rightarrow (\mathcal{B}(ABC) \vee \mathcal{B}(BCA) \vee \mathcal{B}(CAB))$ (górny aksjomat wymiaru)

Aksjomat Euklidesa i jego równoważna forma:

A10 $\mathcal{B}(ADT) \wedge \mathcal{B}(BDC) \wedge A \neq D \rightarrow$

$$\exists X, Y(\mathcal{B}(ABX) \wedge \mathcal{B}(ACY) \wedge \mathcal{B}(XTY))$$

$A\ 10'$ $\mathcal{B}(ABC) \wedge \mathcal{B}(CDE) \wedge \mathcal{B}(EFA) \wedge AB \equiv BC \wedge CD \equiv DE \wedge EF \equiv FA) \rightarrow FA \equiv BD$

Aksjomat ciągłości

A11 $\forall \mathcal{X}, \mathcal{Y}\{\exists A \forall X, Y[X \in \mathcal{X} \wedge Y \in \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{B}(AXY)] \rightarrow \exists B \forall X, Y[X \in \mathcal{X} \wedge Y \in \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{B}(XBY)]\}$

Modele teorii Tarskiego (*płaszczyzny euklidesowe*) to struktury postaci: $\langle \mathcal{P}, \mathcal{B}, \equiv \rangle$, gdzie $\mathcal{P}$ jest zbiorem punktów, a $\mathcal{B}$ i $\equiv$ odpowiednimi relacjami określonymi w tym zbiorze.

Kartezjańska płaszczyzna euklidesowa

Def. 1. Niech $\mathbf{F} = \langle F, +, \cdot, 0, 1, \leq \rangle$ będzie uporządkowanym ciałem pitagorejskim (tzn. $\forall a, b \exists c(a^2 + b^2 = c^2)$). Kartezjańską płaszczyzną euklidesową nad ciałem $\mathbf{F}$ nazywamy strukturę $\mathcal{C}_2(\mathbf{F}) = \langle F^2, \equiv_{\mathbf{F}}, \mathcal{B}_{\mathbf{F}} \rangle$, gdzie relacje $\equiv_{\mathbf{F}}, \mathcal{B}_{\mathbf{F}}$ są określone następująco:$(x_1, x_2)(y_1, y_2) \equiv_{\mathbf{F}} (u_1, u_2)(v_1, v_2) \leftrightarrow$

$$(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 = (u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2$$

$\mathcal{B}_{\mathbf{F}}((x_1, x_2)(y_1, y_2)(z_1, z_2)) \leftrightarrow$

$$\exists t(t \in F \wedge 0 \leq t \leq 1 \wedge (y_1 - x_1) = t(z_1 - x_1) \wedge (y_2 - x_2) = t(z_2 - x_2)).$$

Twierdzenie o reprezentacji

Twierdzenie 2. *Każdy model teorii aksjomatów* A1, ..., A10 *jest izomorficzny z kartezjańską płaszczyzną euklidesową nad uporządkowanym ciałem pitagorejskim* $\mathbf{F}$. *Jeśli dołączymy* A11, *to* $\mathbf{F}$ *jest ciałem liczb rzeczywistych* $\mathbb{R}$ *(teoria jest kategoryczna).*

Oznaczenia i skróty

Def. $Col(ABC) :\leftrightarrow (\mathcal{B}(ABC) \vee \mathcal{B}(BCA) \vee \mathcal{B}(CAB))$

Def. $(A_1, A_2, ..., A_n) \equiv (A'_1, A'_2, ..., A'_n) :\leftrightarrow \forall_{i,j=1}^{n}(A_iA_j \equiv A'_iA'_j)$

Def. $\mathrm{AFS}\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{pmatrix} :\leftrightarrow (\mathcal{B}(ABC) \wedge \mathcal{B}(A'B'C') \wedge AB \equiv A'B' \wedge BC \equiv B'C' \wedge AD \equiv A'D' \wedge BD \equiv B'D')$

A5: $A \neq B \wedge \mathrm{AFS}\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{pmatrix} \rightarrow CD \equiv C'D'$

Def. $\mathrm{FS}\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{pmatrix} :\leftrightarrow (Col(ABC) \wedge Col(A'B'C') \wedge AB \equiv A'B' \wedge BC \equiv B'C' \wedge AD \equiv A'D' \wedge BD \equiv B'D')$

Twierdzenie 3. $A \neq B \wedge \mathrm{FS}\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{pmatrix} \rightarrow CD \equiv C'D'$

Podobieństwa i izometrie

Def. 2. Podobieństwem nazywamy dowolny automorfizm struktury $\langle \mathcal{P}, \mathcal{B}, \equiv \rangle$ czyli bijekcję zbioru punktów $\mathcal{P}$ zachowującą relacje $\mathcal{B}$ i $\equiv$.

Def. 3. Izometrią nazywamy przekształcenie $\varphi : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$, spełniające warunek: $\varphi(X)\varphi(Y) \equiv XY$.

Twierdzenie 4. $\mathcal{B}(ABC) \wedge (ABC) \equiv (A'B'C') \rightarrow \mathcal{B}(A'B'C')$

Twierdzenie 5. *Każda izometria jest podobieństwem.*

Definicje i oznaczenia

1. Prosta przechodząca przez punkty: $A \neq B$: $l(A, B) := \{X |\ Col(ABX)\}$.
2. Półprosta o początku A, przechodząca przez B: $h(A, B) := \{X | \mathcal{B}(ABX) \vee \mathcal{B}(AXB)\}$.
3. Symetralna odcinka AB $(A \neq B)$: $s(A, B) := \{X |\ AX \equiv BX\}$.
4. Środek odcinka: $\mathbf{M}(A, B) = X \leftrightarrow \mathbf{B}(AXB) \wedge AX \equiv XB$.
5. Symetria środkowa: $\mathbf{S}_O(A) = A' :\leftrightarrow \mathbf{M}(A, A') = O$.

Def. Przekształcenie φ nazywamy inwolucją gdy $\varphi \circ \varphi = id$ i $\varphi \neq id$.

Tw. $\mathbf{S}_O$ jest inwolucyjną izometrią.

Definicje i oznaczenia cd.

6. Punkty A, C, B tworzą kąt prosty:

   $\mathcal{R}(ACB) :\leftrightarrow AB \equiv A\mathbf{S}_C(B)$.

7. $a \perp b :\leftrightarrow$

   $\exists A, C, B(\mathcal{R}(ACB) \wedge C \in a, b \wedge A \in a \wedge B \in b \wedge C \neq A, B)$.

8. Rzut prostokątny punktu A na prostą l:

   $\mathbf{R}_l(A) = A' :\leftrightarrow \forall X \in l(\mathcal{R}(AA'X))$.

9. Symetria osiowa: $\mathbf{S}_l(A) = A' :\leftrightarrow \mathbf{M}(A, A') = \mathbf{R}_l(A)$

Tw. $\mathbf{S}_l$ jest inwolucyjną izometrią.

Tw. Niech $A \in a, b$. Wówczas:

$a \perp b \leftrightarrow \mathbf{S}_A = \mathbf{S}_a \circ \mathbf{S}_b \leftrightarrow \mathbf{S}_b \circ \mathbf{S}_a = \mathbf{S}_a \circ \mathbf{S}_b \neq id$.

Definicje i oznaczenia cd.

10. $a \parallel b :\leftrightarrow a = b \vee a \cap b = \emptyset$.

Tw. $a \parallel b \leftrightarrow \exists c(a, b \perp c)$.

11. Wektor związany to uporządkowana para punktów.

    Przystawanie wektorów związanych: $(A, B) \equiv (C, D) :\leftrightarrow \mathbf{M}(A, D) = \mathbf{M}(B, C)$.

    Wektor swobodny $\overrightarrow{AB}$ to klasa relacji przystawania o reprezentancie (A, B).

Kąty

12. Kąt (skierowany) to (uporządkowana) para półprostych o wspólnym początku.

    Relacja przystawania kątów:

    $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle DEF \leftrightarrow \exists A', C', D', F'(A' \in h(B, A) \wedge C' \in h(B, C) \wedge D' \in h(E, D) \wedge F' \in h(E, F) \wedge A', C' \neq B \wedge (A'BC') \equiv (D'EF')$

    Klasy abstrakcji relacji przystawania kątów, to kąty swobodne.

- Kąty skierowane przystają gdy istnieje złożenie dwóch symetrii osiowych, które przeprowadza jeden na drugi.

  Klasy abstrakcji relacji przystawania kątów skierowanych, to kąty swobodne skierowane.

Twierdzenie 6 (O sztywności dla prostej). *Jeśli izometria zachowuje dwa różne punkty, to zachowuje również wszystkie punkty z nimi współliniowe.*

Twierdzenie 7 (O sztywności dla płaszczyzny). *Jeśli izometria zachowuje trzy punkty niewspółliniowe, to zachowuje wszystkie punkty płaszczyzny euklidesowej (jest identycznością).*

Wn. 1. *Izometria zachowująca dwa różne punkty jest identycznością lub symetrią osiową*

Twierdzenie 8. *Jeśli* $\neg Col(ABC)$ *i* $(ABC) \equiv (A'B'C')$*, to istnieje złożenie dwóch lub trzech symetrii osiowych, które przeprowadza* A, B, C *odpowiednio na* A', B', C'*.*

Twierdzenie 9 (O doskonałej jednorodności). *Jeśli* $\neg Col(ABC)$ *i* $(ABC) \equiv (A'B'C')$*, to istnieje dokładnie jedna izometria* φ*, która przeprowadza* A, B, C *odpowiednio na* A', B', C'*.*

Wn. 2. *Dowolna izometria płaszczyzny jest złożeniem dwóch lub trzech symetrii osiowych.*

Twierdzenie 10. *Złożenie dwóch symetrii osiowych nie jest symetrią osiową.*

Twierdzenie 11 (O redukcji). *Jeśli proste* a, b, c *są współpękowe (tzn. są równoległe lub mają punkt wspólny), to istnieje współpękowa z nimi prosta* d*, taka że* $\mathbf{S}_d = \mathbf{S}_c \circ \mathbf{S}_b \circ \mathbf{S}_a$*.*

Def. 4. Złożenie dwóch symetrii osiowych nazywamy *izometrią parzystą* a trzech - *izometrią nieparzystą*.

Def. 5. Złożenie $\mathbf{S}_l \circ \mathbf{S}_k$ nazywamy *translacją* gdy $l \parallel k$, a *obrotem* gdy $l \cap k \neq \emptyset$.

Wn. 3. *W reprezentacji* $\mathbf{S}_b \circ \mathbf{S}_a$ *obrotu lub translacji jedna z prostych może być wybrana jako dowolna prosta odpowiedniego pęku.*

Uwaga 1. Jeśli $\varphi = \mathbf{S}_b \circ \mathbf{S}_a$ jest translacją, $A \in a, B = \mathbf{R}_b(A)$, to dla dowolnego X mamy $\overrightarrow{X\varphi(X)} = 2\overrightarrow{AB} =: \vec{u}$. Jeśli $\psi = \mathbf{S}_b \circ \mathbf{S}_a$ jest obrotem i β jest miarą kąta skierowanego od a do b, to dla dowolnego $X \neq O$ mamy $|\sphericalangle XO\psi(X)| = 2\beta =: \alpha$. Przyjmujemy oznaczenia $\varphi = \mathbf{T}_{\vec{u}}$ i $\psi = \mathbf{R}_O^{\alpha}$.

Def. 6. Złożenie $\mathbf{S}_b \circ \mathbf{S}_A$ symetrii środkowej z osiową nazywamy *symetrią z poślizgiem*.

Twierdzenie 12. *Każda izometria nieparzysta jest symetrią z poślizgiem. Jeśli* $A \in b$*, to* $\mathbf{S}_b \circ \mathbf{S}_A$ *jest symetrią osiową.*

Uwaga 2. Jeśli $B := \mathbf{R}_b(A)$, $k := l(A, B)$ i $\vec{u} := 2\overrightarrow{AB}$, to $\mathbf{S}_b \circ \mathbf{S}_A = \mathbf{T}_{\vec{u}} \circ \mathbf{S}_k = \mathbf{S}_k \circ \mathbf{T}_{\vec{u}}$, gdzie $\vec{u} \parallel k$. Stąd nazwa symetria z poślizgiem. Tak określoną symetrię z poślizgiem oznaczamy $\mathbf{S}_k^{\vec{u}}$.

Wn. 4. *Grupa izometrii płaszczyzny euklidesowej jest biinwolutywna tzn. każda izometria jest złożeniem dwóch inwolucji.*

Twierdzenie 13. *Dla dowolnej izometrii φ, punktu A i prostej a zachodzi:*

1. $\varphi \circ \mathbf{S}_a \circ \varphi^{-1} = \mathbf{S}_{\varphi(a)}$,
2. $\varphi \circ \mathbf{S}_A \circ \varphi^{-1} = \mathbf{S}_{\varphi(A)}$.