Równania różniczkowe. Energetyka 2023

1. **Równania o zmiennych rozdzielonych**: $p(y)y' = q(x)$.

   Rozwiązanie znajdujemy całkując $\int p(y)dy = \int q(x)dx$.

2. **Równanie linowe jednorodne (RRLJ)**: $y' + p(x)y = 0$.

   Rozwiązanie ma postać: $y = Ce^{-P(x)}$ gdzie $P(x) = \int p(x)dx$.

3. **Równania liniowe niejednorodne (RRLN)**: $y' + p(x)y = q(x)$. Uzmiennianie stałej:

   $C(x)$ wyznaczamy wstawiając $y = C(x)e^{-P(x)}$ do (RRLN). Rozwiązanie ogólne $y = (C(x) + C)e^{-P(x)}$.

4. **Równanie różniczkowe zupełne**: $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$, gdzie $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

   Rozwiązanie ma postać $F(x, y) = C$, funcję F wyznaczamy z warunku $dF = P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$.

5. **Równanie** $y'' = F(x, y')$ sprowadzamy do równania $u' = F(x, u)$ za pomocą podstawienia $u(x) = y'(x)$.

6. **Równania liniowe drugiego rzędu jednorodne**: $y'' + py' + qy = 0$.

   Równanie charakterystyczne to $r^2 + pr + q = 0$. Rozwiązanie ma postać $y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$, gdzie:

   (a) $y_1 = e^{r_1x}$, $y_2 = e^{r_2x}$, gdy r_1, r_2 są różnymi rzeczywistymi pierwiastkami równania charakterystycznego,
   (b) $y_1 = e^{rx}$, $y_2 = xe^{rx}$, gdy r jest rzeczywistym pierwiastkiem podwójnym równania char.,
   (c) $y_1 = e^{ax}\cos bx$, $y_2 = e^{ax}\sin bx$, gdy $z_{1,2} = a \pm bi$ są zespolonymi pierwiastkami równania char.

7. **Równania liniowe drugiego rzędu niejednorodne**: $y'' + py' + qy = h(x)$.

   Rozwiązanie ma postać $y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \varphi(x)$.

8. **Metoda współczynników nieoznaczonych znajdowania funkcji** φ.

   Jeśli prawa strona jest postaci $h(x) = W(x)e^{ax}$, gdzie $W(x)$ jest wielomianem, to przewidujemy, że:

   (a) $\varphi(x) = V(x)e^{ax}$, gdy a nie jest pierwiastkiem równania charakterystycznego,
   (b) $\varphi(x) = xV(x)e^{ax}$, gdy a jest pojedynczym pierwiastkiem równania charakterystycznego,
   (c) $\varphi(x) = x^2V(x)e^{ax}$, gdy a jest podwójnym pierwiastkiem równania charakterystycznego,
   gdzie $V(x)$ jest wielomianem tego samego stopnia co $W(x)$.

   Jeśli prawa strona jest postaci $h(x) = m\cos bx + n\sin bx$, to rozwiązanie przewidujemy w postaci:

   (a) $\varphi(x) = M\cos bx + N\sin bx$, gdy bi nie jest pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego,
   (b) $\varphi(x) = x(M\cos bx + N\sin bx)$, gdy bi jest pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego.

   Jeżeli funkcje $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ są odpowiednio rozwiązaniami równań:

   $$y'' + py' + qy = h_1(x), \qquad y'' + py' + qy = h_2(x),$$

   to funkcja $\varphi_1(x) + \varphi_2(x)$ jest rozwiązaniem równania: $y'' + py' + qy = h_1(x) + h_2(x)$.

9. **Układ dwóch równań różniczkowych liniowych**. Jeżeli $b \neq 0$, to układ

   $$\begin{cases} x' &= ax + by \\ y' &= cx + dy \end{cases} \quad \left(\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)$$

   sprowadzamy do równania liniowego jednorodnego rzędu 2:

   $$x'' - (a + d)x' + (ad - bc)x = 0$$

   różniczkując pierwsze równanie i rugując y, y'.

   Po wyznaczniu funkcji $x(t)$, funkcję $y(t) = \frac{1}{b}(x'(t) - ax(t))$ wyznaczamy z pierwszego równania.