Oryginał	Transformata		Oryginał	Transformata
1	$\frac{1}{s}$		t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{s-\alpha}$		$\sin\beta t$	$\frac{\beta}{s^2+\beta^2}$
$\cos\beta t$	$\frac{s}{s^2+\beta^2}$		$\mathrm{sh}\alpha t$	$\frac{\alpha}{s^2-\alpha^2}$
$\mathrm{ch}\alpha t$	$\frac{s}{s^2-\alpha^2}$		$t^n e^{\alpha t}$	$\frac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}}$
$e^{\alpha t}\sin\beta t$	$\frac{\beta}{(s-\alpha)^2+\beta^2}$		$e^{\alpha t}\cos\beta t$	$\frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\beta^2}$

Transformata Laplace'a

Def. 1. *Transformatą Laplace'a* funkcji $f(t)$ określonej na przedziale $[0,\infty)$ nazywamy funkcję $F(s)$ zmiennej zespolonej (lub rzeczywistej) określoną wzorem:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt.$$

Funkcję $F(s)$ nazywamy *obrazem* funkcji $f(t)$, a funkcję $f(t)$ *oryginałem* funkcji $F(s)$. Transformatę funkcji $f(t)$ oznacza się $\mathcal{L}\{f(t)\}$.

Uwaga 1. W większości literatury $F(s)$ jest funkcją zmiennej zespolonej s. W książce M. Gewerta i S. Skoczylasa *Równania różniczkowe zwyczajne. Przykłady i zadania*, s jest zmienną rzeczywistą.

Przykład: 1. Wyznaczyć transformaty funkcji: $f(t) = 1$, $g(t) = e^t$ i $h(t) = \sin t$.

Warunki wystarczające istnienia transformaty Laplace'a

Tw. 1. *Jeżeli funkcja* $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ *spełnia wraunki:*

1. *na każdym przedziale* $[0,T]$, *gdzie* $T > 0$ *ma skończoną liczbę punktów nieciągłości i są one pierwszego rodzaju;*
2. $$\bigvee_{C\in\mathbb{R}} \bigvee_{M>0} \bigwedge_{t\geq 0} |f(t)| \leq Me^{Ct},$$

to jej transformata laplace'a $\mathcal{L}\{f(t)\}$ *istnieje dla* $s > C$.

Transformaty ważniejszych funkcji

Tw. 2 (Liniowość transformaty). 1. $\mathcal{L}\{f(t)+g(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} + \mathcal{L}\{g(t)\}$;

2. $\mathcal{L}\{cf(t)\} = c\mathcal{L}\{f(t)\}$.

Przykład: 2. Wyznaczyć transformaty funkcji: $f(t) = 2+3t+t^2$, $g(t) = e^t+\cos t$.

Przykład: 3. Wyznaczyć oryginały mają dane transformaty: a) $F(s) = \dfrac{1}{s^2+9}$, b) $F(s) = \dfrac{s+4}{s^2+4}$, c) $F(s) = \dfrac{1}{s(s+1)}$, d) $F(s) = \dfrac{1}{s^4}$.

Tw. 3 (Zmiana skali)**.** *Jeżeli funkcja $f(t)$ jest oryginałem, a $F(s)$ jej transformatą Laplace'a, to dla dowolnej stałej $\alpha > 0$*

$$\mathcal{L}\{f(\alpha t)\} = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{s}{\alpha}\right).$$

Transformata pochodnej funkcji

Tw. 4. *Jeżeli $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ i $f(t)$ ma ciągłą n-tą pochodną na przedziale $(0, \infty)$, to*

1. $\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0^+)$;
2. $\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0^+) - f'(0^+)$;
3. $\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^nF(s) - s^{n-1}f(0^+) - s^{n-2}f'(0^+) - ... - sf^{(n-2)}(0^+) - f^{(n-1)}(0^+)$,

gdzie $f(0^+) = \lim\limits_{t \to 0^+} f(t)$ i analogicznie dla pochodnych.

Uwaga 2. Jeżeli f i jej pochodne są ciągłe w $t_0 = 0$ to ich prawostronne granice są równe wartości w punkcie $t_0 = 0$.

Rozwiązywanie równań różniczkowych za pomocą transformaty Laplace'a

Przykład: 4. Rozwiązać dane zagadnienia początkowe równań i układu równań różniczkowych liniowych o stałych współczynnikach:

1. $y' - 2y = e^t, \;\; y(0) = 0$;
2. $y'' - 6y' + 5y = 0, \;\; y(0) = 2, \;\; y'(0) = 6$;
3. $y'' + y = t^2 + 2, \;\; y(0) = 1, \;\; y'(0) = 1$;
4. $\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & x+y \\ y' & = & y \end{array} \right., \left\{ \begin{array}{lcl} x(0) & = & 1 \\ y(0) & = & 1 \end{array} \right.$