

Lista zadań dla studentów Energetyki. 3

1. Wyznaczyć wszystkie pochodne cząstkowe pierwszego rzędu danych funkcji:

(a) $f(x, y) = x^2y^4 + y^2\sqrt{x}$; (b) $f(x, y) = \frac{x^2}{y^3} + \frac{y^2}{x^3}$; (c) $f(x, y) = \frac{1 - xy}{x + xy}$; (d) $f(x, y) = x^y - y^x$;
(e) $f(x, y) = e^{\sin xy}$; (f) $f(x, y, z) = x^2y^3 + y^2z + xyz^2$.

2. Wyznaczyć pochodne cząstkowe drugiego rzędu danych funkcji:

(a) $f(x, y) = x^3y + y^3x$; (b) $f(x, y) = x^2y + \frac{x^2}{y^3}$; (c) $f(x, y) = \sin(x^2 + 2y)$; (d) $f(x, y) = e^{xy}$.

3. Korzystając z różniczek odpowiednich funkcji wyznaczyć wartości przybliżone wyrażeń:

(a) $\sqrt{(-2,98)^2 + (4,03)^2}$; (b) $(1,03)^{5,02}$; (c) $\sqrt[3]{(1,94)^2 + (2,03)^2}$.

4. Wysokość i promień podstawy stożka zmierzono z dokładnością ± 1 mm. Otrzymano $h = 60$ cm, $r = 30$ cm. Z jaką dokładnością można wyznaczyć jego objętość i pole powierzchni.

5. Wyznaczyć gradient funkcji $f(x, y) = xy$ w dowolnym punkcie. Dla punktu $(1, 1)$ wyznaczyć pochodne w kierunku gradientu oraz wektorów $[\frac{4}{5}, \frac{3}{5}]$ i $[\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}]$.

6. Wyznaczyć ekstrema podanych funkcji:

(a) $f(x, y) = x^2 + y^3 + 2x - 12y + 14$; (b) $f(x, y) = (2x + y^2)e^x$; (c) $f(x, y) = 3xy - x^3 - y^3$;
(d) $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2+2x)}$; (e) $f(x, y) = \frac{8}{x} + \frac{x}{y} + y$; (f) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 32 \ln(xy)$.

7. Obliczyć całki: (a) $\int_0^1 dx \int_0^2 2xydy$; (b) $\int_0^2 dx \int_0^x 4y^3dy$; (c) $\int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 (1+x+2y)dy$; (d) $\int_1^3 dx \int_0^{\frac{3}{x}} dy$;
(e) $\int_1^2 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi$; (f) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^4 r dr$. Zinterpretować geometrycznie.

8. Obliczyć dane całki po danych obszarach:

(a) $\iint_D (y^2\sqrt{x})dxdy$, gdzie D jest prostokątem $ABCD$, $A = (1, 0)$, $B = (4, 0)$, $C = (4, 3)$, $D = (1, 3)$;
(b) $\iint_D (4xy)dxdy$, gdzie D jest trójkątem ABC , $A = (0, 0)$, $B = (2, 2)$, $C = (0, 2)$;
(c) $\iint_D (x^2 + y)dxdy$, gdzie D jest ograniczony parabolami $y = x^2$ i $x = y^2$;
(d) $\iint_D \frac{x^2}{y^2}dxdy$, D jest ograniczony liniami $y = x$, $x = 2$, $xy = 1$.

9. Wprowadzając współrzędne biegunowe obliczyć całki podwójne:

(a) $\iint_D e^{-(x^2+y^2)}dxdy$ gdzie $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 2\}$;
(b) $\iint_D \frac{dxdy}{x^2 + y^2 - 1}$ gdzie $D = \{(x, y) : 9 \leq x^2 + y^2 \leq 25\}$;
(c) $\iint_D ydxdy$ gdzie $D = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, 0 \leq y \leq x\}$.

10. Znaleźć objętości brył ograniczonych powierzchniami:

(a) $z = 1 + x + y$, $x + y = 1$ i płaszczyznami układu współrzędnych;
(b) $y = x^2$, $z = x^2 + y^2$, $y = 1$, $z = 0$;
(c) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 1$ (część wspólną kuli i walca).