

Lista zadań dla studentów Energetyki 2. Całki oznaczone i szeregi.

1. Wykonując wskazane podstawienia obliczyć całki:

(a) $\int_0^2 3x^2 \sqrt{1+x^3} dx$, $u = 1+x^3$; (b) $\int_0^3 \frac{xdx}{\sqrt{x+1}}$, $t = x+1$; (c) $\int_1^3 x \sqrt[3]{x^2-1} dx$, $u = x^2-1$;
(d) $\int_0^3 x \sqrt{9-x^2} dx$, $t = 9-x^2$; (e) $\int_0^\pi \sin x e^{\cos x} dx$, $u = \cos x$.

2. Obliczyć:

(a) $\int_{-1}^2 |x|^3 dx$; (b) $\int_0^4 |3x-x^2| dx$; (c) $\int_0^\pi |\cos x - \frac{1}{2}| dx$.

3. Obliczyć wartości średnie danych funkcji na danych przedziałach:

(a) $f(x) = 4x - x^2$, $[0, 4]$; (b) $f(x) = \frac{3}{x}$, $[1, 3]$; (c) $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$, $[0, \frac{1}{2}]$ (podst. $t = 1-x^2$).

4. Obliczyć pola obszarów ograniczonych liniami:

- (a) parabolą $y = x^2$ i prostą $y = 2x + 3$;
(b) parabolą $y = -x^2 + 3x$ i prostą $y = 4x - 2$;
(c) parabolami $y = -x^2$ i $y = x^2 - 2x$;
(d) hiperbolą $y = \frac{4}{x}$ i prostą $y = 5 - x$;
(e) wykresami funkcji $y = \sin x$, $y = \cos x$ oraz osią Oy ($x \geq 0$);
(f) parabolami $y = x^2$ i $x = y^2$.

5. Obliczyć objętości brył powstałych w wyniku obrotu wokół osi Ox danych trapezów krzywoliniowych:

(a) $0 \leq y \leq 2x - x^2$, $x \in [0, 2]$; (b) $0 \leq y \leq \operatorname{tg} x$, $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$; (c) $0 \leq y \leq \sqrt{r^2 - x^2}$ dla dowolnego $r > 0$.

6. Obliczyć długości danych krzywych:

- (a) $y = \frac{1}{2}x^2$, gdzie $0 \leq x \leq 1$ (wsk. skorzystać z legalnej ściągki);
(b) $y = \operatorname{ch} x$, gdzie $0 \leq x \leq 1$ (wsk. skorzystać z jedynki hiperbolicznej $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$).

7. Obliczyć pola powierzchni powstałych w wyniku obrotu wokół osi Ox wykresów danych funkcji (dla dowolnych $r, h > 0$):

(a) $y = \sqrt{r^2 - x^2}$; (b) $y = \frac{r}{h}x$, gdzie $x \in [0, h]$.

8. Zbadać zbieżność całek niewłaściwych i obliczyć te, które są zbieżne:

(a) $\int_1^\infty \frac{dx}{(x+2)^2}$; (b) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4}$; (c) $\int_0^\infty x^2 e^{-x^3} dx$; (d) $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{3x+5}}$; (e) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[5]{x^2}}$; (f) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$.

9. Korzystając z kryterium całkowego zbadać zbieżność podanych szeregów:

(a) $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2+4}$; (b) $\sum_{n=1}^\infty \frac{n}{n^2+4}$; (c) $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n \ln^2 n}$; (d) $\sum_{n=1}^\infty \frac{n^3}{e^{n^4}}$; (e) $\sum_{n=1}^\infty \frac{n}{(n^2+1)^2}$.

10. Wyznaczyć przedziały zbieżności podanych szeregów potęgowych:

(a) $\sum_{n=1}^\infty \frac{x^n}{n2^n}$; (b) $\sum_{n=1}^\infty n(x-2)^n$; (c) $\sum_{n=1}^\infty \frac{(x+3)^n}{n^3}$; (d) $\sum_{n=1}^\infty \frac{(x-7)^n}{\sqrt{n}3^n}$.

11. Korzystając z szeregów Maclaurina wyprowadzonych na wykładzie wyznaczyć szeregi Maclaurina podanych funkcji i określić przedziały ich zbieżności:

(a) $\frac{2}{1-3x}$; (b) $\frac{x}{9+x^2}$; (c) xe^{2x} ; (d) $\cos \frac{x}{2}$.